

Analytische und numerische Verfahren zur Berechnung der Hilbert-Transformation und zur Lösung funktionentheoretischer Randwertaufgaben

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik

der Technischen Universität Bergakademie Freiberg
genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

Dr. rer. nat.

vorgelegt

von Dipl. Math. B.Sc. Frank Martin

geboren am 28.07.1981 in Stollberg

Gutachter: Prof. Dr. Elias Wegert (Freiberg)
Prof. Dr. Daniel Potts (Chemnitz)

Tag der Verleihung: 17. Dezember 2010

Für Marie

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich den Leuten danken, die mich während der letzten Jahre unterstützt haben und somit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Zuerst bedanke ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. E. Wegert für seine zahlreichen Ratschläge, Hinweise und Anregungen, die maßgeblich bei der Ausarbeitung der Arbeit geholfen haben. Die häufigen Diskussionen haben das Interesse an dem Thema gefördert und mich immer wieder motiviert weiterzumachen.

Weiterhin gebührt mein Dank Prof. Dr. D. Potts von der Technischen Universität Chemnitz für seine Bemerkungen zur Arbeit. Diese waren stets hilfreich und haben den Fortschritt der Arbeit unterstützt.

Zum Abschluß möchte ich mich bei meiner Familie, meinen Freunden und insbesondere bei meiner Freundin bedanken. Sie haben mich in den letzten Jahren stets unterstützt und standen mir mit Wort und Tat zur Seite.

Freiberg, September 2010

Frank Martin

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Grundlagen	13
2.1	Räume von Funktionen auf \mathbb{R} , \mathbb{T} und in \mathbb{D}	14
2.2	Splines	18
2.3	Wavelets	23
2.4	Zirkulante Matrizen	30
2.5	Die Hilbert-Transformation auf \mathbb{R}	32
2.6	Die Hilbert-Transformation auf \mathbb{T}	39
2.7	Riemann-Hilbert Probleme	46
2.7.1	Lineare Riemann-Hilbert Probleme	46
2.7.2	Nichtlineare Riemann-Hilbert Probleme	51
3	Wavelet-Methoden für die Hilbert-Transformation	56
3.1	Hilbert-Transformation der Wavelets auf \mathbb{R} und \mathbb{T}	57
3.2	Numerische Berechnung von der Hilbert-Transformation der Wavelets	60
3.3	Berechnung des Hilbert-Operators auf gleichmäßigen Gittern	69
3.4	Berechnung des Hilbert-Operators auf ungleichmäßigen Gittern	77
3.5	Effektivität	83
3.6	Berechnung des Hilbert-Operators auf adaptiven Gittern	85
3.6.1	Von Fein zu Grob	85
3.6.2	Von Grob zu Fein	87
3.7	Numerische Ergebnisse	99
4	Numerische Lösung nichtlinearer Randwertaufgaben	106
4.1	Explizite Riemann-Hilbert Probleme	108
4.1.1	Lösbarkeit	108
4.1.2	Konvergenz des diskreten Verfahrens	110
4.1.3	Numerische Ergebnisse	114
4.2	Ein geometrisch motiviertes Newton-Verfahren	118
4.2.1	Verfahren	118
4.2.2	Abgeändertes Verfahren	120

4.2.3	Numerische Ergebnisse	125
4.3	Riemann-Hilbert Probleme als Operatorgleichung	130
4.3.1	Operatorgleichung	130
4.3.2	Modifikationen des Newton-Verfahren	132
4.3.3	Numerische Ergebnisse	136
5	Zusammenfassung	139
	Tabellenverzeichnis	141
	Abbildungsverzeichnis	142
	Literatur	144

1 Einleitung

Riemann-Hilbert Probleme werden erstmalig in der Dissertation [38] von Riemann erwähnt. Er stellt die Aufgabe, wie man holomorphe Funktionen über ihre Randwerte eindeutig charakterisieren kann. Ein Spezialfall von Riemann-Hilbert Problemen ist das Problem der konformen Abbildung vom Einheitskreis auf ein beschränktes Gebiet. Bei der Lösung dieser Probleme spielt der Hilbert-Operator, auch Operator der Konjugation genannt, eine wichtige Rolle. Außerdem ist die Hilbert-Transformation einer der fundamentalen Operatoren innerhalb der Funktionentheorie und findet in vielen verschiedenen Gebieten Anwendung wie zum Beispiel in der Signalverarbeitung (siehe [23, 27]) und in der Optik (siehe [27]). Deshalb ist die Auswertung des Hilbert-Operators ein Schwerpunkt dieser Arbeit.

Direkte Methoden zur Auswertung der Hilbert-Transformation beruhen auf der Diskretisierung des beteiligten singulären Integrals. Ein Beispiel dafür ist der so genannte Wittich-Operator [20, 22, 25]. Effektivere Methoden erhält man, wenn man sich die Eigenschaft zu Nutze macht, dass die Hilbert-Transformation ein Diagonaloperator im Fourier-Bereich ist. Dies erlaubt die Anwendung von schnellen Fourier-Methoden, falls die Funktion auf einem entsprechenden gleichmäßigen Gitter gegeben ist. Die Verwendung gleichmäßiger Gitter ist aber nicht effizient, da sich der “interessante” Teil der Funktion auf einen kleinen Abschnitt des Definitionsgebietes konzentriert. Ein Beispiel dafür ist das Phänomen des *crowding* bei konformen Abbildungen. Dieses Phänomen tritt bei der konformen Abbildung des Einheitskreises auf ein langgezogenes Gebiet auf. Das Bild von gleichmäßig verteilten Punkten auf dem Rand des Einheitskreises wird sehr ungleichmäßig auf dem Rand des Gebietes verteilt. Abbildung 1.1 zeigt das Bild der konformen Abbildung auf eine Ellipse mit 2^{12} gleichverteilten Punkten auf dem Einheitskreis. Zu erkennen ist sehr gut, dass sich die Funktionswerte in den Punkten $\pm i$

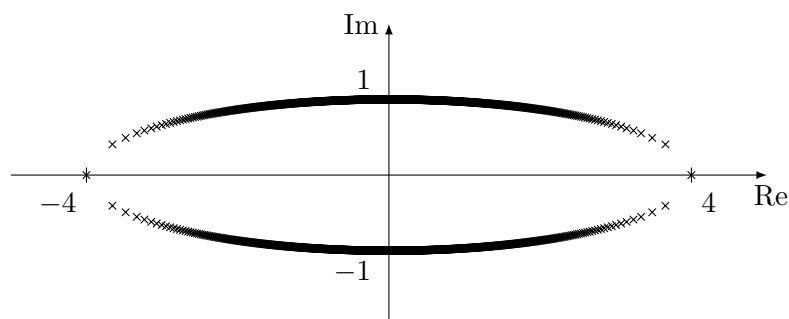


Abbildung 1.1: konforme Abbildung auf eine Ellipse

häufen. Die Punkte ± 4 werden dagegen nur sehr schlecht durch die Bildpunkte der Funktion überdeckt. Die Verzerrung der Abbildung kann durch das Achsenverhältnis τ bestimmt werden. Sie kann durch $\frac{1}{2\pi\sqrt{e}} \exp\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$ nach unten abgeschätzt werden. Das heißt, wir haben ein exponentielles Anwachsen der Verzerrung mit τ . Dadurch stellt crowding ein ernstzunehmendes Problem dar. Für Details sei auf [48] verwiesen. Ähnliche Effekte treten auch bei der Lösung nichtlinearer Riemann-Hilbert Probleme und H^∞ -Optimierungsprobleme auf (siehe [44]). Aus diesem Grund wollen wir einerseits eine Möglichkeit zur Auswertung des Hilbert-Operators auch auf ungleichmäßigen Gittern vorstellen. Weiterhin soll ein Verfahren präsentiert werden, welches das Gitter adaptiv dem Problem anpasst, da wir im Allgemeinen a-priori nicht wissen, wo sich diese Stellen befinden.

Zur Auswertung des Hilbert-Operators auf ungleichmäßigen Gittern gibt es verschiedene Ansätze. In den Arbeiten [18] und [19] werden *Multipol Methoden* beschrieben, die zur Berechnung der Hilbert-Transformation herangezogen werden können. Außerdem sind von Kunis und Potts (siehe beispielsweise [26, 29]) Fourier-Methoden entwickelt worden, um die schnelle Fourier-Transformation auf nicht gleichmäßigen Gittern auszuwerten. Dies ermöglicht die Berechnung der Hilbert-Transformation abermals im Fourier-Bereich. Eine weitere Möglichkeit zur Auswertung singulärer Integrale wird in der Arbeit [6] von Börn und Hackbusch beschrieben. Dabei werden Methoden des panel clusterings und eine Hierarchie von Mengen verwendet. Abschließend wollen wir eine Methode nennen, die sehr interessant für weitere Untersuchungen sein kann. Die zu transformierende Funktion wird dabei durch Funktionen approximiert, von denen die Hilbert-Transformation explizit bekannt ist. Ein Beispiel dafür wäre der Imaginärteil der sogenannten Blaschkefaktoren

$$\operatorname{Im} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z, a \in \mathbb{C}, \quad |a| < 1.$$

Der Hilbert-Operator ist dann gerade der Realteil. Für weiterführende Informationen siehe zum Beispiel [36].

Die Grundlagen der vorgestellten Algorithmen ordnen sich in das Konzept der Arbeiten [12, 13] von Dahmen, Pröbldorf und Schneider ein. Eine Funktion f besitzt innerhalb einer biorthogonalen Wavelet-Basis die Darstellung

$$f(x) = \sum_k a_k \varphi_k^1(x) + \sum_j \sum_k b_{j,k} \psi_{j,k}^1(x).$$

mit den Koeffizienten $a_k = \langle f, \tilde{\varphi}_k^1 \rangle$ und $b_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k}^1 \rangle$. Dabei bezeichnen $\tilde{\varphi}^1$ und $\tilde{\psi}^1$ die zu φ^1 und ψ^1 dualen Funktionen. Wendet man einen Operator A auf die obige Darstellung an

und entwickelt das Ergebnis in der gleichen oder einer anderen biorthogonalen Basis, so folgt

$$Af(x) = \sum_k \bar{a}_k \varphi_k^2(x) + \sum_j \sum_k \bar{b}_{j,k} \psi_{j,k}^2(x).$$

mit $\bar{a}_k = \langle Af, \tilde{\varphi}_k^2 \rangle$ und $\bar{b}_{j,k} = \langle Af, \tilde{\psi}_{j,k}^2 \rangle$ und den dualen Funktionen $\tilde{\varphi}^2$ und $\tilde{\psi}^2$. Ist der Operator A linear und beschränkt, so muss man die Skalarprodukte

$$\langle A\varphi_k^1, \tilde{\varphi}_l^2 \rangle, \quad \langle A\psi_{j,k}^1, \tilde{\varphi}_l^2 \rangle, \quad \langle A\varphi_k^1, \tilde{\psi}_{\nu,l}^2 \rangle, \quad \langle A\psi_{j,k}^1, \tilde{\psi}_{\nu,l}^2 \rangle$$

berechnen, um die Koeffizienten \bar{a}_k und $\bar{b}_{j,k}$ aus a_k und $b_{j,k}$ zu bestimmen. Besitzen die Wavelets einen kompakten Träger und verschwindende Momente, so ist ein Großteil dieser Skalarprodukte sehr klein und kann dementsprechend durch Null ersetzt werden, falls ein vorgeschriebener Approximationsfehler zugelassen ist. Die Kompressionsrate der resultierenden Algorithmen hängt dabei von der Größe des Trägers der Wavelets und der Anzahl ihrer verschwindenden Momenten ab.

In dieser Arbeit werden wir biorthogonale Spline-Wavelets benutzen. Ausgehend von den Funktionswerten auf einem (ungleichmäßigen) Gitter interpolieren wir die Funktion unter Verwendung dieser Wavelets und werten die transformierte Funktion auf dem gleichen oder einem anderen Gitter mittels Dirac-Funktionalen aus. Diese Vorgehensweise und die Verwendung von Wavelet-Methoden wird durch die Anwendung auf Riemann-Hilbert Probleme motiviert. Zum einen ermöglicht es, direkt mit den Funktionswerten zu arbeiten, was vorteilhaft ist, da während der Iteration zur Lösung von Riemann-Hilbert Problemen nichtlineare Superpositions-Operatoren Anwendung finden. Außerdem erlauben Wavelets, die Gebiete zu ermitteln, in denen das Verhalten der Lösung eine Verfeinerung des zu Grunde liegenden Gitters erfordert. Weiterhin verwenden wir Spline-Wavelets, da die Berechnung der Hilbert-Transformation für stückweise Polynome relativ einfach ist. Eine Alternative wäre die Verwendung trigonometrischer Wavelets (siehe Prestin [33], Prestin und Quak [34]).

Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist die numerische Lösung nichtlinearer Riemann-Hilbert Probleme. Für den Spezialfall der konformen Abbildung auf ein beschränktes Gebiet entwickelte Wegmann in [46, 47] ein Verfahren zur Bestimmung dieser Abbildung. Diese Methode wurde in der Arbeit [43] von Wegert auf Riemann-Hilbert Probleme übertragen. Bei der numerischen Umsetzung des Wegmann Verfahrens auf einem gleichmäßigen Gitter treten Konvergenz zerstörende Phänomene auf, falls das Problem schlecht konditioniert ist. Zu Beginn ist eine quadratische Konvergenz zu beobachten, die dann in eine lineare Phase der

Konvergenz übergeht. Anschließend bekommt man einen linearen Anstieg des Zuwachses, was die Konvergenz des Verfahrens beeinträchtigt. Ähnliche Erscheinungen treten auch bei der Lösung nichtlinearer Riemann-Hilbert Probleme auf, siehe [43, 44]. Aus diesem Grund wollen wir Modifikationen dieses Verfahrens vorstellen, die ein besseres Konvergenzverhalten aufweisen. Neben dem Verfahren von Wegmann gibt es noch weitere Möglichkeiten zur Lösung nichtlinearer Riemann-Hilbert Probleme. Dabei interpretiert man das Problem als eine nicht-lineare singuläre Integralgleichung, wobei der Hilbert-Operator involviert ist. Zur Lösung dieser Integralgleichung verwendet man dann unter anderem Kollokationsmethoden. Als ein Beispiel wollen wir die Arbeit [32] nennen.

Die Gliederung der Arbeit ist wie folgt. Kapitel 2 führt Bezeichnungen ein und fasst die Grundlagen zusammen, die während der Arbeit benötigt werden. Wir beginnen mit der Vorstellung von Splines und ihren Eigenschaften. Anschließend betrachten wir das Konzept einer Multiskalenanalyse näher und geben die Spline-Wavelets an, die innerhalb der Arbeit verwendet werden. Danach werden Darstellungen des Hilbert-Operators auf der reellen Achse und auf dem Kreis entwickelt, die für die Berechnung der Hilbert-Transformation der Wavelets nützlich sind. Abschließend stellen wir die Riemann-Hilbert Probleme und ihre Lösbarkeit näher vor. Im Kapitel 3 wird dann detailliert auf die schnelle numerische Auswertung des Hilbert-Operators eingegangen. Zu Beginn präsentieren wir Algorithmen zur Bestimmung der Hilbert-Transformation der Spline-Wavelets. Im Anschluß widmen wir uns der Auswertung des Hilbert-Operators sowohl auf einem gleichmäßigen Gitter als auch ungleichmäßigen Gittern und geben die Komplexität des Verfahrens an. Danach werden adaptive Strategien vorgestellt, die schrittweise ein Gitter konstruieren, was beispielsweise die Verzerrungen bei der konformen Abbildung gut wiedergeben kann. Den Abschluß von Kapitel 3 bilden numerische Ergebnisse unserer Algorithmen. Im folgenden Kapitel 4 werden sowohl analytische als auch numerische Methoden präsentiert, die zur Lösung von Riemann-Hilbert Problemen herangezogen werden können. Wir beginnen dabei mit sogenannten expliziten Riemann-Hilbert Problemen und betrachten danach Riemann-Hilbert Probleme, deren Zielkurven durch eine Funktion parametrisiert werden. Im Anschluß untersuchen wir Riemann-Hilbert Probleme mit Zielkurven, die durch die Nullstellen einer Funktion beschrieben werden können. Anhand von Beispielen werden die beschriebenen Verfahren getestet und mit den theoretischen Resultaten verglichen.

2 Grundlagen

Wichtige Resultate, die in der Arbeit von Bedeutung sind, werden in diesem Kapitel zusammengefasst. Wir beginnen mit der Vorstellung der verwendeten Funktionenräume. Im Anschluß führen wir Splines mit ihren Eigenschaften ein, da sie zur Konstruktion der Wavelets benötigt werden. Anschließend beschreiben wir das Konzept einer Multiskalenanalyse und geben die Spline-Wavelets an, die wir während der Arbeit verwenden werden, sowie wichtige Eigenschaften. Nach einem kleinen Abschnitt zu zirkulanten Matrizen widmen wir uns der Hilbert-Transformation sowohl auf der reellen Achse als auch auf dem Kreis. Wir präsentieren wichtige Eigenschaften und geben Darstellungen des Hilbert-Operators an, die später zur Auswertung der Hilbert-Transformation der Spline-Wavelets herangezogen werden. Zum Schluß stellen wir Riemann-Hilbert Probleme und ihre Lösbarkeit vor.

2.1 Räume von Funktionen auf \mathbb{R} , \mathbb{T} und in \mathbb{D}

Wir stellen zu Beginn die Funktionenräume vor, die in der Arbeit von Bedeutung sind, und geben einige bekannte Resultate an. Für Beweise und weiter gehende Informationen verweisen wir auf [7, 17, 24, 39, 49, 52].

Mit $C(X)$ und $C^n(X)$ bezeichnen wir die linearen Räume der auf X stetigen beziehungsweise n -mal stetig (reell) differenzierbaren komplexwertigen Funktionen. Soweit es sich um normierte Räume handelt, seien diese mit den üblichen Normen versehen.

Für $1 \leq p < \infty$ seien $L_p(\mathbb{R})$ und $L_p(\mathbb{T})$ die Lebesgue-Räume der auf der reellen Achse \mathbb{R} beziehungsweise auf der Einheitskreislinie \mathbb{T} zur p -ten Potenz summierbaren komplexwertigen Funktionen,

$$L_p(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} := \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

$$L_p(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L_p} := \left[\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p |dt| \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Die Räume $L_2(\mathbb{R})$ und $L_2(\mathbb{T})$ sind Hilbert-Räume mit den Skalarprodukten

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} |dt|.$$

Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(f)$ einer auf \mathbb{R} stetigen Funktion f mit kompaktem Träger wird durch

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

definiert. Wegen der Formel von Parseval-Plancherel

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

kann die Fourier-Transformation \mathcal{F} stetig zu einem unitären Operator auf $L_2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden.

Die Fourier-Koeffizienten von $f \in L_p(\mathbb{T})$ werden mit \hat{f}_n bezeichnet und sind durch

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) t^{-n} |dt| \quad (2.1)$$

gegeben. Für $f \in L_2(\mathbb{T})$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|_{L_2}^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2$$

und die Fourier-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n t^n, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (2.2)$$

konvergiert in $L_2(\mathbb{T})$ gegen f .

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet $W_2^k(\mathbb{R})$ den Sobolev-Raum aller Funktionen auf \mathbb{R} , deren verallgemeinerte Ableitungen $D_x^s f := \frac{d^s}{dx^s} f$ der Ordnungen $s = 1, \dots, k$ in $L_2(\mathbb{R})$ liegen. Eine äquivalente Definition ist

$$W_2^k(\mathbb{R}) := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \xi^s \mathcal{F}(f)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}) \text{ für } s = 0, \dots, k\}.$$

Mit der Norm

$$\|f\|_{W_2^k(\mathbb{R})} := \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|D_x^k f\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

wird $W_2^k(\mathbb{R})$ zu einem Banachraum.

Die Sobolev-Räume $W_2^k(\mathbb{T})$ von Funktionen auf der Einheitskreislinie werden mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten (2.1) definiert,

$$W_2^k(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L_2(\mathbb{T}) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2)^k |\hat{f}_n|^2 < \infty \right\}.$$

Für auf \mathbb{T} definierte Funktionen f bezeichne Df ihre verallgemeinerte Ableitung nach dem Polarwinkel,

$$Df(e^{i\tau}) := -i \frac{d}{d\tau} f(e^{i\tau}).$$

Gehört die Funktion f zu $W_2^k(\mathbb{T})$, so liegen die Ableitungen $D^s f$ der Ordnungen $s = 1, \dots, k$ in $L_2(\mathbb{T})$ und

$$\|f\|_{W_2^k} := \left(\|f\|_{L_2}^2 + \|D^k f\|_{L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine Norm auf $W_2^k(\mathbb{T})$. Äquivalente Normen sind durch

$$\|f\|_{L_2} + \|Df\|_{L_2} + \dots + \|D^k f\|_{L_2}$$

und

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^2)^k |\hat{f}_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

gegeben, siehe [24, Satz 4.13] und [52, Satz 7.5].

Die Transformation $\tilde{f}(\tau) := f(e^{i\tau})$ vermittelt eine bijektive Zuordnung zwischen Funktionen f auf der Kreislinie \mathbb{T} und 2π -periodischen Funktionen \tilde{f} auf der reellen Achse \mathbb{R} . Die periodischen Sobolev-Räume $W_2^k[0, 2\pi]$ entstehen aus $W_2^k(\mathbb{T})$ durch Identifikation der Funktionen f und \tilde{f} . Analog werden die periodischen Sobolev-Räume $W_2^k[a, b]$ auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$ definiert. Speziell wählen wir als weitere Repräsentanten von \mathbb{T} die Intervalle $[-\pi, \pi]$ und $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Wenn es aus dem Kontext hervorgeht, um welches Intervall es sich handelt, so bezeichnen wir diese Räume einfach mit W_2^k .

Neben Funktionen auf \mathbb{R} und \mathbb{T} betrachten wir auch Funktionen in der komplexen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, wobei insbesondere harmonische und holomorphe Funktionen eine wichtige Rolle spielen werden.

Zur Definition des harmonischen Hardy-Raumes $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ betrachten wir in \mathbb{D} harmonische Funktionen $w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, definieren für $0 \leq r < 1$ die Funktionen w_r auf \mathbb{T} durch

$$w_r(t) := w(rt), \quad t \in \mathbb{T},$$

und setzen

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{D}) := \left\{ w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : w \text{ harmonisch und } \|w\|_{\mathcal{H}_2} := \sup_{0 \leq r < 1} \|w_r\|_{L_2} < \infty \right\}.$$

Funktionen w in $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ sind im allgemeinen nicht stetig auf die abgeschlossene Kreisscheibe fortsetzbar, sie besitzen aber Randwerte in einem allgemeineren Sinn. Zu deren Definition betrachten wir sogenannte Stolzse Sektoren,

$$S(t, \alpha) := \{z \in \mathbb{D} : |\arg(1 - \bar{t}z)| < \alpha, |z - t| < \cos \alpha\}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Existiert für einen Punkt $t \in \mathbb{T}$ und jeden Winkel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ der Grenzwert

$$w^*(t) := \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in S(t, \alpha)}} w(z),$$

so ist dieser unabhängig von α und wird nichttangentialer Randwert von w in t genannt.

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen Funktionen aus $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ und Funktionen aus $L_2(\mathbb{T})$ stellt der Satz von Fatou dar.

Satz 2.1 (Fatou) [28, S. 11] *Jede Funktion $w \in \mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ besitzt fast überall auf \mathbb{T} nicht-tangentiale Randwerte. Die zugehörige Randfunktion w^* liegt in $L_2(\mathbb{T})$ und es gilt*

$$\|w^*\|_{L_2} = \|w\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Umgekehrt kann jede Funktion $f \in L_2(\mathbb{T})$ mit Hilfe der Poissonschen Integralformel

$$Pf(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} \frac{t+z}{t-z} f(t) |dt|, \quad z \in \mathbb{D},$$

in \mathbb{D} zu einer harmonischen Funktion in $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ fortgesetzt werden, deren (nichttangente) Randfunktion mit f übereinstimmt.

Der holomorphe Hardy-Raum $H_2(\mathbb{D})$ ist der (abgeschlossene) Unterraum von $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$, der aus allen in \mathbb{D} holomorphen Funktionen besteht.

Der Satz von Fatou gilt natürlich für $H_2(\mathbb{D})$ ebenfalls, allerdings ist nicht jede Funktion $f \in L_2(\mathbb{T})$ Randfunktion einer holomorphen Funktion, wie die Beispiele $f(t) = t^{-k}$ mit $k \geq 1$ zeigen.

Wir bezeichnen mit $H_2(\mathbb{T})$ den abgeschlossenen Unterraum von $L_2(\mathbb{T})$, der von allen Randfunktionen holomorpher Funktionen aus $H_2(\mathbb{D})$ gebildet wird. Weil die Zuordnung der Randfunktion nach dem Satz von Fatou normerhaltend ist, können die holomorphen Hardy-Räume $H_2(\mathbb{D})$ in \mathbb{D} und $H_2(\mathbb{T})$ auf \mathbb{T} miteinander identifiziert werden.

2.2 Splines

In diesem Kapitel führen wir die erforderlichen Bezeichnungen für Splines ein und geben einen Überblick über wichtige Eigenschaften und Ergebnisse. Für weiter reichende Details und Informationen verweisen wir auf [7, 9, 50].

Mit \mathcal{P}_n bezeichnen wir die Menge aller Polynome vom Grad höchstens n und $C^{-1}(\mathbb{R})$ sei der lineare Raum der auf \mathbb{R} stückweise stetigen Funktionen.

Alle in dieser Arbeit betrachteten Splines sollen der im Folgenden beschriebenen Klasse angehören.

Definition 2.2 *Es sei $\Delta = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots$ eine endliche oder abzählbare Zerlegung von \mathbb{R} ohne Häufungspunkte und $m \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Spline vom Grad m zur Zerlegung Δ , wenn gilt:*

1. *f ist $m - 1$ mal stetig differenzierbar, $f \in C^{m-1}(\mathbb{R})$.*
2. *Die Restriktion von f auf jedes der Intervalle $[x_k, x_{k+1})$ ist ein Polynom vom Grad höchstens m , d.h. $f|_{[x_k, x_{k+1})} \in \mathcal{P}_m$.*

Die Menge aller Splines vom Grad m zur Zerlegung Δ bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_m(\Delta)$. Für $\Delta = \mathbb{Z}$ setzen wir $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m(\mathbb{Z})$.

Wir führen die Bezeichnungen

$$x_+ := \max(0, x), \quad x_+^m := (x_+)^m, \quad m \geq 2,$$

ein. Dann bilden die Funktionen

$$\{1, \dots, x^m\} \cup \{(x - x_k)_+^m : k = -N + 1, \dots, N - 1\} \quad (2.3)$$

eine Basis für $\mathcal{S}_{m,N}(\Delta)$ bezüglich der Zerlegung $\Delta = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ([9, S. 82] und [50, Satz 3.3.2]). Dabei ist $\mathcal{S}_{m,N}(\Delta)$ der Unterraum von Funktionen $f \in \mathcal{S}_m(\Delta)$, so dass die Restriktionen

$$f|_{(-\infty, x_{-N+1})} \quad \text{und} \quad f|_{[x_{N-1}, \infty)}$$

von f Polynome in \mathcal{P}_m sind. Somit besitzt jede Funktion $f \in \mathcal{S}_{m,N}(\Delta)$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Funktionen (2.3). Die Basisfunktionen $(x - x_k)_+^m$ sind unbeschränkt und gehören nicht zu $L_2(\mathbb{R})$.

Eine besser geeignete Basis für \mathcal{S}_m wird von den B-Splines $N_m(x - k)$ der Ordnung m erzeugt. Diese Funktionen N_m sind (endliche) Linearkombinationen der $(x - k)_+^m$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und

können rekursiv definiert werden. Dazu sei N_0 die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, 1)$,

$$N_0(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $m \geq 1$ setzen wir

$$N_m(x) = N_{m-1} * N_0(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Dabei ist die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt$$

definiert. Zur Existenz von $f * g$ gilt

Satz 2.3 [7, S. 5] *Es sei $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ und g habe einen kompakten Träger. Dann existiert $(f * g)(x)$ fast überall und $f * g \in L_2(\mathbb{R})$ mit*

$$\|f * g\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} \|g\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$

Aus der rekursiven Definition der B-Splines lassen sich viele Eigenschaften ableiten, von denen einige im nächsten Satz zusammengefasst sind, vergleiche [9, S. 85-87].

Satz 2.4 *Der B-Spline N_m der Ordnung m besitzt die folgenden Eigenschaften:*

1. $\text{supp } N_m = [0, m + 1]$.
2. $N_m(x) > 0$ für $0 < x < m + 1$.
3. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(x - k) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
4. Die B-Splines N_m und N_{m-1} sind durch die Identität

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1)$$

verbunden.

5. Die Funktion N_m ist symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes ihres Trägers:

$$N_m\left(\frac{m+1}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m+1}{2} - x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Das Funktionensystem $\{N_m(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ bildet nicht nur eine Basis für \mathcal{S}_m , sondern es ist sogar eine Riesz-Basis im Sinne der folgenden Definition.

Definition 2.5 Eine Funktion $\psi \in E \subseteq L_2(\mathbb{R})$ generiert eine Riesz-Basis von E , wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. die lineare Hülle von $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ist dicht in E und
2. es existieren positive Konstanten A und B mit $0 < A \leq B < \infty$, so dass

$$A \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \right) \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(\cdot - k) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq B \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \right)$$

für alle $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2 := \left\{ (d_k)_{k \in \mathbb{Z}} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 < \infty \right\}$ gilt.

Im weiteren sei V_0^m die Abschließung von $\mathcal{S}_m \cap L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$. Das bedeutet, V_0^m ist der kleinste abgeschlossene Unterraum von $L_2(\mathbb{R})$, der $\mathcal{S}_m \cap L_2(\mathbb{R})$ enthält.

Satz 2.6 [9, S. 90] Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ generiert der B-Spline N_m eine Riesz-Basis im Unterraum V_0^m von $L_2(\mathbb{R})$. Es existieren also positive Konstanten A_m und B_m , so dass

$$A_m \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \right) \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k N_m(\cdot - k) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq B_m \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \right)$$

für alle $(c_k) \in \ell_2$ gilt, mit

$$B_m = 1, \quad m \geq 0$$

$$A_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ \frac{1}{(2m+1)!} \prod_{k=1}^m \frac{(1+\lambda_k)^2}{|\lambda_k|}, & m \geq 1 \end{cases}.$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die ersten m betragsmäßig kleinsten Nullstellen des sogenannten Euler-Frobenius Polynoms

$$E_{2m+1}(z) := (2m+1)! z^m \sum_{k=-m}^m N_{2m+2}(m+1+k) z^k.$$

Bislang haben wir nur Splines mit der Knotenmenge \mathbb{Z} untersucht. Allgemeiner betrachten wir die Räume $\mathcal{S}_m^j := \{f(2^j \cdot) : f \in \mathcal{S}_m\}$ von Splines zur Knotenmenge $2^{-j}\mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$. Weil jede Spline-Funktion zur Knotenmenge $2^{-j}\mathbb{Z}$ auch ein Spline zur Knotenmenge $2^{-\nu}\mathbb{Z}$ ist, solange $j < \nu$, bekommen wir eine Kette

$$\dots \subseteq \mathcal{S}_m^{-1} \subseteq \mathcal{S}_m^0 \subseteq \mathcal{S}_m^1 \subseteq \dots \quad (2.4)$$

von Spline-Räumen. Die Funktionen $\{2^{\frac{j}{2}}N_m(2^jx - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ bilden eine Riesz-Basis für

$$V_j^m := \overline{\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k 2^{\frac{j}{2}} N_m(2^j \cdot -k) : (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2 \right\}}$$

mit den gleichen Konstanten wie für den Fall V_0^m . Wegen $\mathcal{S}_m^0 \subseteq \mathcal{S}_m^1$ läßt sich die Funktion N_m als Linearkombination von $\sqrt{2}N_m(2 \cdot -k)$, $k \in \mathbb{Z}$, darstellen:

$$N_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \sqrt{2} N_m(2x - k). \quad (2.5)$$

Die Koeffizienten h_k der Darstellung (2.5) lauten

$$h_k = \begin{cases} \sqrt{2} 2^{-(m+1)} \binom{m+1}{k}, & 0 \leq k \leq m+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.6)$$

Mit Hilfe der beiden letzten Eigenschaften lassen sich Spline-Wavelets konstruieren, was im nachfolgenden Kapitel beschrieben wird.

Zum Abschluß des Abschnittes untersuchen wir das folgende Interpolationsproblem. Gegeben seien natürliche Zahlen $j \in \mathbb{N}$, $m \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ und eine Funktion $f \in W_2^k[0, 1]$ mit $k < m + 1$. Gesucht ist eine Funktion $s \in \mathcal{S}_m^j$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} s\left(\frac{l}{2^j}\right) &= f\left(\frac{l}{2^j}\right), & l = 0, \dots, 2^j - 1 \\ s(l+1) &= s(l), & l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dazu benötigen wir die 1-periodischen Versionen der Funktionen $N_m(2^j \cdot)$ und definieren

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(2^j(x+k)).$$

Auf Grund des kompakten Trägers von N_m ist die Summe endlich und die Funktionen φ_m sind wohl definiert. Als Ergebnis bekommen wir nun

Satz 2.7 [21], [35, S. 44] Sei $f \in W_2^k[0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$s(x) = \sum_{n=0}^{2^j-1} a_n 2^{\frac{j}{2}} \varphi_m\left(x - \frac{n}{2^j}\right) \quad (2.7)$$

mit

$$s\left(\frac{l}{2^j}\right) = f\left(\frac{l}{2^j}\right), \quad l = 0, \dots, 2^j - 1.$$

Dann gilt für $0 \leq r \leq k < m + 1$ mit $k > \frac{1}{2}$ und $r < m + \frac{1}{2}$

$$\|f - s\|_{W_2^r} \leq C 2^{j(r-k)} \|f\|_{W_2^k}.$$

Die Konstante C hängt dabei von m , r und k ab und ist unabhängig von j und f .

Die Koeffizienten a_n aus (2.7) können durch das Gleichungssystem

$$\sum_{n=0}^{2^j-1} 2^{\frac{j}{2}} \varphi_m \left(\frac{l-n}{2^j} \right) a_n = f \left(\frac{l}{2^j} \right), \quad l = 0, \dots, 2^j - 1,$$

bestimmt werden. Dabei ist die Koeffizientenmatrix $\left(2^{\frac{j}{2}} \varphi_m \left(\frac{l-n}{2^j} \right) \right)_{n=0, l=0}^{2^j-1, 2^j-1}$ zirkulant und das Gleichungssystem läßt sich dadurch schnell lösen, siehe auch Kapitel 2.4. Ergänzend ist in [5] ein Algorithmus mit Komplexität $\mathcal{O}(2^j)$ zur Bestimmung der Koeffizienten a_n angegeben.

2.3 Wavelets

In diesem Abschnitt sollen einige Grundlagen der *Multiskalenanalyse* vorgestellt werden, die sich in den letzten zwanzig Jahren zu einem wichtigen Werkzeug der angewandten Mathematik entwickelt hat. Speziell geben wir die Multiskalenanalyse an, die von den Splines N_m generiert wird. Ausführliche Darstellungen findet man beispielsweise in [9, 10, 14, 31].

Eine Multiskalenanalyse besteht aus einer Kette geschachtelter Räume

$$\dots \subseteq V_{-2} \subseteq V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \quad (2.8)$$

mit

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- (A) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$,
- (B) Es existiert eine *Skalierungsfunktion* $\varphi \in V_0$, so dass die Menge $\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine orthonormale Basis von V_0 ist.

Definieren wir $\varphi_{j,k}(x) := 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$, so bildet für jedes j das System $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine orthonormale Basis für V_j . Wegen $\varphi \in V_0 \subseteq V_1 = \overline{\text{span}\{\varphi_{1,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$ erfüllt die Funktion φ eine *Skalierungsgleichung*

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k). \quad (2.9)$$

Die Koeffizienten h_k werden *Filterkoeffizienten* genannt. Aufgrund der Orthonormalität von $\varphi_{0,k}$ genügen sie der Bedingung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Das mit der Multiskalenanalyse verknüpfte *orthogonale Wavelet* ist dann definiert durch

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad (2.10)$$

mit den Filterkoeffizienten

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{-k+1}}.$$

Das System $\psi_{j,k}(x) := 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, bildet dann eine orthonormale Basis für $L_2(\mathbb{R})$. Ferner ist die Menge $W_j := \overline{\text{span}\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$ das orthogonale Komplement von V_j in V_{j+1} .

Der Orthoprojektor P_j auf die Menge V_j für eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist durch

$$P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x)$$

gegeben und der *Detail-Operator* Q_j wird durch $Q_j = P_{j+1} - P_j$ definiert. Aus den Skalierungsgleichungen (2.9), (2.10) und den Orthogonalitätsbeziehungen folgt

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \langle f, \varphi_{j+1,n} \rangle, \\ \langle f, \psi_{j,k} \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \langle f, \varphi_{j+1,n} \rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Beide Formeln in (2.11) haben die Form einer diskreten Faltung, gefolgt von einem “down-sampling” (nur jeder zweite Eintrag wird benötigt). Der Ausdruck (2.11) zeigt auf, wie man die gröbere Projektion P_j aus der feineren P_{j+1} berechnen kann, sowie die “Differenz-Information” zwischen beiden Projektionen. Umgekehrt bekommen wir aus P_j und Q_j die Projektion P_{j+1} . Mit (2.9), (2.10) und $P_{j+1} = P_j + Q_j$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\langle f, \varphi_{j,n} \rangle \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle + \langle f, \psi_{j,n} \rangle \langle \psi_{j,n}, \varphi_{j+1,k} \rangle] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [h_{k-2n} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle + g_{k-2n} \langle f, \psi_{j,n} \rangle]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Das Schema (2.12) besteht aus zwei diskreten Faltungen mit einem vorhergehenden “up-sampling”. Wir betrachten die Koeffizienten $\langle f, \varphi_{j,n} \rangle$ beziehungsweise $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$ als eine Folge, deren ungerade Einträge Null sind. Wir setzen $a_{j,k} := \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$ und $b_{j,k} := \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ und wiederholte Anwendung von (2.11) liefert uns die *diskrete Wavelet-Transformation*:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{j,k} & \rightarrow & a_{j-1,k} & \rightarrow & a_{j-2,k} & \rightarrow & \dots \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & b_{j-1,k} & & b_{j-2,k} & & \dots \end{array}$$

Eine Verallgemeinerung von orthonormalen Wavelet-Basen sind die *biorthogonalen Wavelet-Basen*. Die Multiskalenanalyse wird etwas komplizierter als im orthogonalen Fall. Hauptsächlich

lich haben wir jetzt zwei Folgen von Räumen

$$\begin{aligned} \dots \subseteq V_{-2} \subseteq V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots, \\ \dots \subseteq \tilde{V}_{-2} \subseteq \tilde{V}_{-1} \subseteq \tilde{V}_0 \subseteq \tilde{V}_1 \subseteq \tilde{V}_2 \subseteq \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mit W_j bezeichnen wir den Komplementärraum von V_j in der Menge V_{j+1} mit der Eigenschaft $W_j \perp \tilde{V}_j$. Analog definieren wir den Raum \tilde{W}_j . Die Komplementärräume W_j und \tilde{W}_j sind nicht mehr zwingend orthogonal zu V_j bzw. \tilde{V}_j wie zuvor, stattdessen gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$W_j \perp \tilde{V}_j \quad \text{und} \quad \tilde{W}_j \perp V_j. \quad (2.14)$$

Wir bekommen also zwei duale Basen $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ und $\{\tilde{\psi}_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$, die durch Dilatation und Translation von zwei Funktionen ψ und $\tilde{\psi}$ erzeugt werden. Neben dem Wavelet ψ und dem dualen Wavelet $\tilde{\psi}$ gibt es die Skalierungsfunktion φ und die duale Skalierungsfunktion $\tilde{\varphi}$. Wegen $V_0 + W_0 = V_1$ haben wir die Skalierungsgleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_k h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \\ \psi(x) &= \sum_k g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k) \end{aligned} \quad (2.15)$$

und analog für $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \sum_k \tilde{h}_k \sqrt{2} \tilde{\varphi}(2x - k), \\ \tilde{\psi}(x) &= \sum_k \tilde{g}_k \sqrt{2} \tilde{\varphi}(2x - k). \end{aligned}$$

Die folgenden Bedingungen garantieren, dass die Funktionen ψ und $\tilde{\psi}$ zwei duale Riesz-Basen mit (2.14) bilden, vergleiche [10]:

(C1) Die Folgen $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und $(\tilde{h}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sind reell und nur endlich viele Glieder sind von Null verschieden.

(C2)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \tilde{h}_{n+2k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

(C3)

$$g_k = (-1)^{k+1} \tilde{h}_{-k+1} \quad \text{und} \quad \tilde{g}_k = (-1)^{k+1} h_{-k+1} \quad (2.16)$$

(C4) Für die Fourier-Transformation von φ und $\tilde{\varphi}$ gelte: Es existiere $C, \varepsilon > 0$ mit

$$|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

$$|\mathcal{F}(\tilde{\varphi})(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

(C5) Für φ und $\tilde{\varphi}$ ist die Orthogonalitätsbedingung

$$\int \varphi(x) \tilde{\varphi}(x - k) dx = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

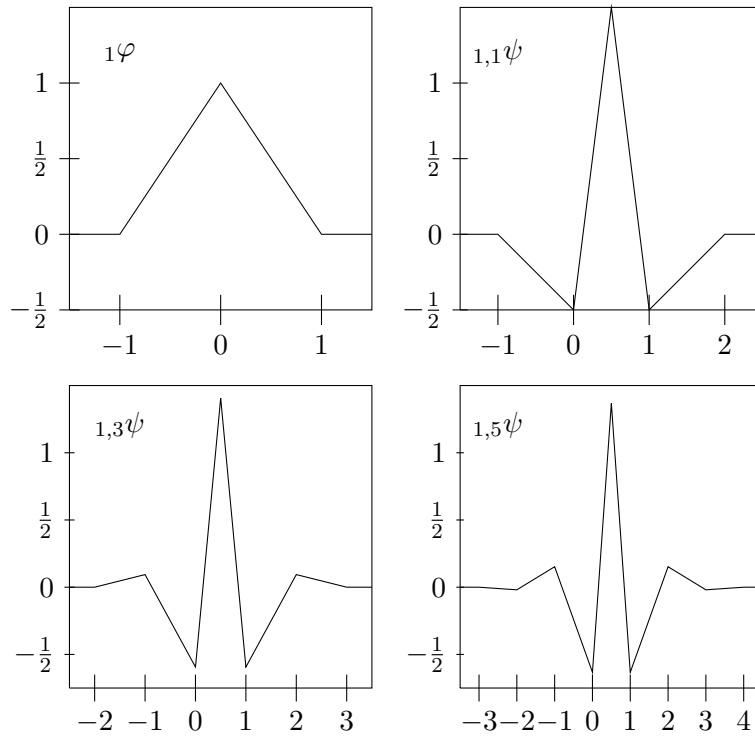
erfüllt.

Für weitere Information verweisen wir auf [10, 14]. In beiden Arbeiten ist auch eine Möglichkeit zur Konstruktion von \tilde{h}_k angegeben ausgehend von den Filterkoeffizienten h_k . Dabei müssen die Bedingungen (C4) und (C5) im Spezialfall genauer untersucht werden.

Im Kapitel 2.2 haben wir gesehen, dass die Spline-Räume \mathcal{S}_m^j die Kette (2.4) bilden. Da $\mathcal{S}_m^j \not\subset L_2(\mathbb{R})$ betrachten wir nicht direkt die Räume \mathcal{S}_m^j , sondern den Abschluß von $\mathcal{S}_m^j \cap L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ und bezeichnen diese Menge mit V_j^m und bekommen eine analoge Kette für die Räume V_j^m . Mit Hilfe der Koeffizienten h_k aus (2.6) lassen sich die Filterkoeffizienten \tilde{h}_k konstruieren, so dass die Bedingungen (C1) - (C5) erfüllt sind, und wir dadurch eine biorthogonale Wavelet-Basis für $L_2(\mathbb{R})$ bekommen. Die Vorgehensweise ist in [10] beschrieben. Es stellt sich heraus, dass unendlich viele Möglichkeiten vorhanden sind. Dazu führen wir einen weiteren Parameter $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$, $\tilde{m} \geq m$, ein, so dass die Summe $m + \tilde{m}$ gerade ist. Wir bezeichnen das entsprechende Wavelet mit $_{m,\tilde{m}}\psi$, das duale Wavelet mit $_{m,\tilde{m}}\tilde{\psi}$ und die duale Skalierungsfunktion mit $_{m,\tilde{m}}\tilde{\varphi}$. Die Skalierungsfunktion $_m\varphi$ ist in diesem Fall nicht der B-Spline N_m sondern der zentrierte B-Spline $_m\varphi(x) := N_m(x + \frac{m+1}{2})$. In Tabelle 2.1 sind die Filterkoeffizienten h_k und \tilde{h}_k für einige Werte von m und \tilde{m} aufgelistet. In Abbildung 2.1 ist der Graph von $_{1,\tilde{m}}\psi$ für verschiedene Werte von \tilde{m} dargestellt.

m	$\frac{h_k}{\sqrt{2}}$	\tilde{m}	$\frac{\tilde{h}_k}{\sqrt{2}}$
1	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$
		3	$\frac{3}{128}, -\frac{3}{64}, -\frac{1}{8}, \frac{19}{64}, \frac{45}{64}, \frac{19}{64}, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{64}, \frac{3}{128}$
3	$\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$	3	$-\frac{5}{256}, \frac{5}{64}, -\frac{1}{256}, -\frac{3}{8}, \frac{35}{128}, \frac{35}{32}, \frac{35}{128}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{256}, \frac{5}{64}, -\frac{5}{256}$

Tabelle 2.1: Koeffizienten h_k und \tilde{h}_k


 Abbildung 2.1: Graph der Funktionen ${}_1\varphi$, ${}_{1,1}\psi$, ${}_{1,3}\psi$ und ${}_{1,5}\psi$

Nachfolgend untersuchen wir Approximationseigenschaften des Projektors P_j

$$P_j f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, {}_{m,\tilde{m}}\tilde{\varphi}_{j,k} \rangle {}_m\varphi_{j,k}(x)$$

für $f \in W_2^s(\mathbb{R})$. Wegen ${}_{m,\tilde{m}}\psi \in W_2^s(\mathbb{R})$, $0 \leq s < m + \frac{1}{2}$, verschwinden die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k {}_{m,\tilde{m}}\tilde{\psi}(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, m,$$

siehe auch Kapitel 8.3.3 und Satz 5.5.1 aus [14], und folglich haben wir

$$P_j(x^k) = x^k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Man sagt, die Funktion ${}_m\varphi$ erfüllt die *Strang-Fix*-Bedingung der Ordnung m . Somit haben wir

Satz 2.8 [8] Für $f \in W_2^m(\mathbb{R})$ gilt

$$\|f - P_j f\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C 2^{-jm} \|f\|_{W_2^m(\mathbb{R})}.$$

Ist sogar $f \in W_2^{m+1}(\mathbb{R})$, so haben wir

$$\|f - P_j f\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C 2^{-j(m+1)} \|f\|_{W_2^{m+1}(\mathbb{R})}.$$

Allgemeiner bekommen wir für $f \in W_2^s(\mathbb{R})$, $0 < s < m + \frac{1}{2}$, nach [11] beziehungsweise [30, S. 261]

$$\|f - P_j f\|_{W_2^r(\mathbb{R})} \leq C 2^{-j(s-r)} \|f\|_{W_2^s(\mathbb{R})}, \quad 0 \leq r < s.$$

Weiterhin erhalten wir wegen der Skalierungsgleichung (2.5), Satz 2.6 und ${}_m\varphi \in W_2^s(\mathbb{R})$, $0 \leq s < m + \frac{1}{2}$, mit [11] und [30, S. 260], dass die W_2^r -Norm der Funktion $f \in W_2^s(\mathbb{R})$, $0 \leq r < s$, mit der Darstellung

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j_0, km} \varphi_{j_0, k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j, km, \tilde{m}} \psi_{j, k}(x)$$

äquivalent zu

$$\|f\|_{2,r} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j_0, k}|^2 + \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2jr} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_{j, k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Es existieren also positive Konstanten c_r und C_r mit

$$c_r \|f\|_{2,r}^2 \leq \|f\|_{W_2^r(\mathbb{R})}^2 \leq C_r \|f\|_{2,r}^2.$$

Als nächstes geben wir eine Multiskalenanalyse für die periodischen Räume speziell $L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit Hilfe der B-Splines an. Dazu periodisieren wir die Skalierungsfunktionen ${}_m\varphi$, ${}_m, \tilde{m}\tilde{\varphi}$ und die Wavelets ${}_m, \tilde{m}\psi$, ${}_m, \tilde{m}\tilde{\psi}$. Um die Bezeichnungen etwas zu vereinfachen, lassen wir bei den periodischen Wavelets die Parameter m und \tilde{m} weg und geben nur in speziellen Fällen den Wert der Parameter an. Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(x) &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_m\varphi_{j,k}(x+n), \\ \psi_{j,k}(x) &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_m, \tilde{m}\psi_{j,k}(x+n) \end{aligned}$$

und definieren wegen $\varphi_{j,k+2^j} = \varphi_{j,k}$ beziehungsweise $\psi_{j,k+2^j} = \psi_{j,k}$

$$\begin{aligned} V_j &:= \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k}(x) : k = 0, \dots, 2^j - 1\}}, \\ W_j &:= \overline{\text{span}\{\psi_{j,k}(x) : k = 0, \dots, 2^j - 1\}}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften der B-Splines aus Satz 2.4 gilt für $j \leq 0$

$$\varphi_{j,k}(x) \equiv 1 \quad \text{und} \quad \psi_{j,k}(x) \equiv 0.$$

Analog verfahren wir mit den dualen Funktionen $m, \tilde{m} \tilde{\varphi}$ und $m, \tilde{m} \tilde{\psi}$. Jede Funktion $f \in L_2 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ besitzt nun die eindeutige Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (2.17)$$

mit den Wavelet-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{j_0,k} &= \langle f, \tilde{\varphi}_{j_0,k} \rangle, \quad k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1, \\ b_{j,k} &= \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1; \quad j = j_0, \dots \end{aligned}$$

Weiterhin bleiben alle Aussagen des aktuellen Abschnitts, welche für Funktionen und Räume über \mathbb{R} formuliert worden sind, gültig für Funktionen und Räume über das periodische Intervall, wenn wir die Summation über $k \in \mathbb{Z}$ durch die Summation $k = 0, \dots, 2^j - 1$ und die Räume $L_2(\mathbb{R})$ und $W_2^s(\mathbb{R})$ durch $L_2 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ beziehungsweise $W_2^s \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ersetzen. Zusammenfassend haben wir:

- Die Systeme $\{\varphi_{j_0,k} : k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1\} \cup \{\psi_{j,k} : k = 0, \dots, 2^j - 1; j = j_0, \dots\}$ und $\{\tilde{\varphi}_{j_0,k} : k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1\} \cup \{\tilde{\psi}_{j,k} : k = 0, \dots, 2^j - 1; j = j_0, \dots\}$ bilden eine Riesz-Basis für $L_2 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
- Definieren wir für $f \in W_2^s \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $0 < s < m + \frac{1}{2}$, den Operator

$$P_j f(x) := \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x),$$

so gilt

$$\|f - P_j f\|_{W_2^r} \leq C 2^{-j(s-r)} \|f\|_{W_2^s}, \quad 0 \leq r < s. \quad (2.18)$$

- Für eine Funktion $f \in W_2^s \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq s < m + \frac{1}{2}$, mit der Darstellung (2.17) ist die W_2^s -Norm äquivalent zu

$$\|f\|_{2,s} := \left(\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} |a_{j_0,k}|^2 + \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2js} \sum_{k=0}^{2^j-1} |b_{j,k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

Folglich existieren Konstanten c_s und C_s mit

$$c_s \|f\|_{2,s}^2 \leq \|f\|_{W_2^s}^2 \leq C_s \|f\|_{2,s}^2. \quad (2.20)$$

2.4 Zirkulante Matrizen

In diesem Kapitel stellen wir die für die Arbeit relevanten Details zu zirkulanten Matrizen vor. Weitere Informationen können beispielsweise in [15] nachgelesen werden.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt zirkulant, wenn jeder Zeilenvektor relativ zum darüberliegenden Zeilenvektor zyklisch um einen Eintrag nach rechts verschoben ist. Die Matrix A ist also zirkulant, wenn ein Vektor $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})^\top \in \mathbb{C}^n$ existiert, so dass gilt

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Die Multiplikation eines Vektors $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})^\top \in \mathbb{C}^n$ mit einer zirkulanten Matrix lautet dann wie folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{l-j} x_j, \quad l = 0, \dots, n-1,$$

wobei wir den Vektor \mathbf{a} zyklisch erweitern. Dies entspricht gerade einer diskreten Faltung. Damit läßt sich mittels der diskreten Fourier-Transformation eines Vektors $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{n-1})^\top \in \mathbb{C}^n$

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} c_l e^{-2\pi i \frac{kl}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

das Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der zirkulanten Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und dem Vektor $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{n-1})^\top \in \mathbb{C}^n$ effizient lösen. Wenden wir die diskrete Fourier-Transformation auf \mathbf{b} an, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \hat{b}_k &= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} b_l e^{-2\pi i \frac{kl}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{l-j} x_j e^{-2\pi i \frac{kl}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{l=0}^{n-1} a_{l-j} e^{-2\pi i \frac{kl}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-2\pi i \frac{kj}{n}} \sum_{l=-j}^{n-1-j} a_l e^{-2\pi i \frac{kl}{n}} \\ &= n \hat{x}_k \cdot \hat{a}_k. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Mittels der inversen diskreten Fourier-Transformation eines Vektors $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_{n-1})^\top \in \mathbb{C}^n$

$$c_l = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{c}_k e^{2\pi i \frac{kl}{n}}, \quad l = 0, \dots, n-1,$$

erhalten wir die Lösung \mathbf{x} durch

$$x_l = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_k} e^{2\pi i \frac{kl}{n}}.$$

Die Fourier-Matrix

$$F := \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e^{-2\pi i \frac{kl}{n}} \right)_{k=0, l=0}^{n, n}$$

diagonalisiert somit die zirkulante Matrix A .

Mittels der schnellen Fourier-Transformation FFT lässt sich die Lösung mit einer Komplexität von $\mathcal{O}(n \log n)$ für eine Vielzahl von $n \in \mathbb{N}$ bestimmen.

2.5 Die Hilbert-Transformation auf \mathbb{R}

Für eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist der *Hilbert-Operator* $H_{\mathbb{R}} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ auf der reellen Achse \mathbb{R} definiert durch

$$H_{\mathbb{R}}f(y) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-y} dx. \quad (2.22)$$

Das singuläre Integral ist als Cauchyscher Hauptwert

$$H_{\mathbb{R}}f(y) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x-y} dx$$

zu verstehen. Einige wichtige Eigenschaften von $H_{\mathbb{R}}$ sind im folgenden Satz zusammengestellt.

Satz 2.9 1. Der Hilbert-Operator $H_{\mathbb{R}}$ ist dilatations- und translationsinvariant; d.h. für $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} g(x) &:= f(\sigma x) &\Rightarrow H_{\mathbb{R}}g(y) &= H_{\mathbb{R}}f(\sigma y), \\ h(x) &:= f(x-a) &\Rightarrow H_{\mathbb{R}}h(y) &= H_{\mathbb{R}}f(y-a). \end{aligned}$$

2. Sei $f \in L_2(\mathbb{R})$. Für die Fourier-Transformation von $H_{\mathbb{R}}f$ gilt

$$\mathcal{F}(H_{\mathbb{R}})(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi) \mathcal{F}(f)(\xi).$$

3. Ist $f \in W_2^1(\mathbb{R})$, so haben wir

$$D_x H_{\mathbb{R}}f = H_{\mathbb{R}} D_x f,$$

d.h. Differentiation und der Hilbert-Operator $H_{\mathbb{R}}$ sind vertauschbar. Ebenso lassen sich Integration und Anwendung des Hilbert-Operators $H_{\mathbb{R}}$ vertauschen.

4. Der Operator $H_{\mathbb{R}} : W_2^k(\mathbb{R}) \rightarrow W_2^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist beschränkt mit $\|H_{\mathbb{R}}\| = 1$.

5. Seien $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ und g habe einen kompakten Träger. Dann gilt

$$H_{\mathbb{R}}(f * g) = (H_{\mathbb{R}}f) * g.$$

6. Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger haben wir mit $g(x) := xf(x)$

$$H_{\mathbb{R}}g(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + y H_{\mathbb{R}}f(y).$$

Beweis : Die erste Behauptung lässt sich durch Einsetzen einfach verifizieren.

Die Aussagen 2. bis 4. sind bekannte Resultate und sind zum Beispiel in [7, S. 311 und 329] und [27, Kapitel 4.8 und Kapitel 5.2] zu finden.

zu 5. Nach Satz 2.3 existiert sowohl $f * g$ als auch $(H_{\mathbb{R}}f) * g$ und sind Elemente von $L_2(\mathbb{R})$.

Anwendung der Fourier-Transformation auf $H_{\mathbb{R}}(f * g)$ liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(H_{\mathbb{R}}(f * g))(\xi) &= i \operatorname{sgn}(\xi) \mathcal{F}(f * g)(\xi) \\ &= i \operatorname{sgn}(\xi) \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi) \\ &= \mathcal{F}(H_{\mathbb{R}}f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi) \\ &= \mathcal{F}((H_{\mathbb{R}}f) * g)(\xi).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun, da die Fourier-Transformation eine Isomorphie von $L_2(\mathbb{R})$ ist.

zu 6. Da f einen kompakten Träger hat, ist $g \in L_2(\mathbb{R})$. Wir berechnen $H_{\mathbb{R}}g$ direkt und gelangen zu

$$\begin{aligned}H_{\mathbb{R}}g(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(x)}{x-y} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y+y)f(x)}{x-y} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(x)}{x-y} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + yH_{\mathbb{R}}f(y).\end{aligned}$$

#

Wir benötigen die Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}}$ hauptsächlich für Splines vom Grad κ , die einen kompakten Träger besitzen. Dazu betrachten wir zunächst ein Polynom, das auf einem Intervall $[a, b]$ definiert ist,

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x) x^k$$

mit der charakteristischen Funktion

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Als Ergebnis bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \pi H_{\mathbb{R}} f(y) &= \int_a^b \frac{x^k}{x-y} dx = \int_a^b \frac{(x-y+y)^k}{x-y} dx \\
 &= \int_a^b \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} (x-y)^{k-l-1} y^l + \frac{y^k}{x-y} \right) dx \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{1}{k-l} \left((b-y)^{k-l} - (a-y)^{k-l} \right) + y^k \ln \left| \frac{b-y}{a-y} \right|. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Um eine explizite Darstellung der Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}}$ für einen Spline vom Grad κ mit kompaktem Träger zu gewinnen, untersuchen wir die Momente von Funktionen und damit zusammenhängende Eigenschaften der Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}}$.

Definition 2.10 Für jede Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ bezeichne $M_k(f)$ das Moment der Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ durch

$$M_k(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx,$$

sofern das entsprechende Integral konvergiert.

Eine wichtige Rolle spielen Funktionen mit verschwindenden Momenten. Das folgende Lemma beschreibt solche Funktionen mit Hilfe von Ableitungen.

Lemma 2.11 Sei $f \in L_2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$M_k(f) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, \mu - 1.$$

genau dann, wenn eine Funktion $g \in W_2^\mu(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und $D_x^\mu g = f$ existiert.

Beweis : Wir beginnen mit dem Fall, dass die Momente $M_k(f)$, $k = 0, \dots, \mu - 1$, verschwinden. Wir definieren

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Folglich gilt $F \in W_2^1(\mathbb{R})$ mit $D_x F = f$. Die Funktion F besitzt wegen $M_0(f) = 0$ einen kompakten Träger. Weiter ist

$$M_k(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k F(x) dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} f(x) dx = 0$$

für $k = 0, \dots, \mu - 2$. Wiederholte Anwendung liefert die Funktion $g \in W_2^\mu(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und $D_x^\mu g = f$.

Umgekehrt sei $g \in W_2^\mu(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und $f = D_x^\mu g$. Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k D_x^l g(x) dx = x^k D_x^{l-1} g(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} k x^{k-1} D_x^{l-1} g(x) dx$$

für $l = 1, \dots, \mu$ und $k = 1, \dots, l - 1$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_x^l g(x) dx = D_x^{l-1} g(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad l = 1, \dots, \mu,$$

folgt $M_0(f) = \dots = M_{\mu-1}(f) = 0$. #

Für periodische Funktionen definieren wir die Momente, indem wir über ein Periodenintervall anstelle von \mathbb{R} integrieren. Analog erhalten wir

Lemma 2.12 *Sei $f \in L_2(\mathbb{T})$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$M_k(f) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, \mu - 1.$$

genau dann, wenn es eine Funktion $g \in W_2^\mu(\mathbb{T})$ mit kompaktem Träger und

$$D^\mu g(e^{i\tau}) = f(e^{i\tau})$$

gibt.

Mit Hilfe der Momente von f läßt sich eine asymptotische Entwicklung von $H_{\mathbb{R}} f(y)$ für große Werte von y angeben. Es gilt

Satz 2.13 *Für eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger haben wir*

$$H_{\mathbb{R}} f(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_k(f)}{y^{k+1}} + R_n(f, y)$$

mit

$$R_n(f, y) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{n+1}}\right), \quad y \rightarrow \pm\infty.$$

Beweis : Der Träger von f möge im Intervall $[-\sigma, \sigma]$ liegen. Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung von $\frac{1}{x-y}$ bezüglich x um $x_0 = 0$

$$\frac{1}{x-y} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}x - \dots - \frac{1}{y^n}x^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(\xi(x)-y)^{n+1}}x^n,$$

mit $0 < |\xi(x)| < x \leq \sigma$ bekommen wir für $|y| > \sigma$ mit Definition 2.10

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}} f(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{f(x)}{x-y} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[-\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} x - \dots - \frac{1}{y^n} x^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(\xi(x)-y)^{n+1}} x^n \right] f(x) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_k(f)}{y^{k+1}} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{(-1)^n x^n f(x)}{(\xi(x)-y)^{n+1}} dx}_{=R_n(f,y)}. \end{aligned}$$

Die Asymptotik von $R_n(f, y)$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |R_n(f, y)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{|x|^n |f(x)|}{|y - \xi(x)|^{n+1}} dx \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{(|y| - \sigma)^{n+1}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |x|^n |f(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}}{(|y| - \sigma)^{n+1}} \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} x^{2n} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\pi \sqrt{2n+1}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma}{|y| - \sigma} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

#

Wir kehren zu den Splines zurück. Sei $I := [a, b]$ ein beliebiges Intervall und $x_0 := a < x_1 < \dots < x_{\lambda-1} < x_{\lambda} := b$ eine Unterteilung des Intervalls I , welche wir zu einer Zerlegung $\Delta = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von ganz \mathbb{R} fortsetzen. Gegeben sei nun ein Spline $\phi \in \mathcal{S}_{\kappa}(\Delta)$, $0 \leq \kappa < \lambda$, mit den Eigenschaften

(C1) $\phi(x) \equiv 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus I$,

(C2) die Momente $M_0(\phi), \dots, M_{\mu-1}(\phi)$ von ϕ mit $\mu \in \mathbb{N}_0$ verschwinden.

Bemerkung: Die Bedingung (C2) für $\mu = 0$ besagt, dass $M_0(\phi)$ von Null verschieden ist.

Die Funktion $\chi(x) := \phi^{(\kappa)}(x)$ ist dann stückweise konstant mit $\chi(x) = \tilde{c}_k$ für $x \in [x_k, x_{k+1})$.

Wir setzen $\tilde{c}_{-1} = \tilde{c}_{\lambda} = 0$ und bekommen nach (2.23) für die Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}} \chi$

$$\begin{aligned} \pi H_{\mathbb{R}} \chi(y) &= \sum_{k=0}^{\lambda-1} \tilde{c}_k (\ln |x_{k+1} - y| - \ln |x_k - y|) = \sum_{k=0}^{\lambda} \underbrace{(-\tilde{c}_k + \tilde{c}_{k-1})}_{c_k :=} \ln |y - x_k| \\ &= \sum_{k=0}^{\lambda} c_k \ln |y| + \sum_{k=0}^{\lambda} c_k \ln \left| 1 - \frac{x_k}{y} \right|. \end{aligned}$$

Aus Satz 2.13 folgt $H_{\mathbb{R}}\chi(y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \pm\infty$ und somit haben wir $\sum_{k=0}^{\lambda} c_k = 0$ und

$$\pi H_{\mathbb{R}}\chi(y) = \sum_{k=0}^{\lambda} c_k \ln \left| 1 - \frac{x_k}{y} \right|. \quad (2.24)$$

Durch Anwendung von Lemma 2.11 sehen wir, dass die Momente $M_0(\chi), \dots, M_{\mu+\kappa-1}(\chi)$ von χ verschwinden. Nach Satz 2.13 verhält sich $H_{\mathbb{R}}\chi$ asymptotisch wie $\mathcal{O}\left(\frac{1}{y^{\mu+\kappa+1}}\right)$. Mit Hilfe der Taylor-Reihe

$$\ln(1+y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{y^k}{k}$$

erhält man aus dieser Eigenschaft das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_0 x_0^1 + c_1 x_1^1 + \dots + c_{\lambda} x_{\lambda}^1 &= 0, \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 + \dots + c_{\lambda} x_{\lambda}^2 &= 0, \\ \vdots & \\ c_0 x_0^{\mu+\kappa} + c_1 x_1^{\mu+\kappa} + \dots + c_{\lambda} x_{\lambda}^{\mu+\kappa} &= 0 \end{aligned}$$

für die Koeffizienten c_0, \dots, c_{λ} . Zusammen mit der Gleichung $\sum_{k=0}^{\lambda} c_k = 0$ bekommen wir $\mu + \kappa + 1$ Gleichungen. Durch Normalisierung von $c_0 = -1$ gelangen wir zu dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{\lambda}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\mu+\kappa} & x_2^{\mu+\kappa} & \dots & x_{\lambda}^{\mu+\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ \vdots \\ x_0^{\mu+\kappa} \end{pmatrix}.$$

Ist $\mu + \kappa + 1 = \lambda$, so ist die Koeffizientenmatrix eine Vandermonde-Matrix und somit regulär.

Dadurch erhalten wir die Koeffizienten c_1, \dots, c_{λ} . Für die Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}}$ von ϕ integrieren wir die Darstellung (2.24) κ -mal, da Integration und der Hilbert-Operator $H_{\mathbb{R}}$ nach Satz 2.9 vertauschbar sind. Mit $\sum_{k=0}^{\lambda} c_k = 0$ und

$$\int x^k \ln x dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln |x| - \frac{1}{(k+1)^2} x^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

bekommen wir

$$\pi H_{\mathbb{R}}\phi(y) = \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{c_k}{\kappa!} (y - x_k)^{\kappa} \ln |y - x_k|. \quad (2.25)$$

Damit haben wir gezeigt:

Satz 2.14 Sei $\lambda, \kappa, \mu \in \mathbb{N}$ mit $\mu + \kappa + 1 = \lambda$. Weiter sei das abgeschlossene Intervall $I := [a, b]$ und eine Zerlegung $\Delta = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von \mathbb{R} mit $x_0 = a$ und $x_\lambda = b$ gegeben. Dann existiert genau ein normierter Spline $\phi \in \mathcal{S}_\kappa(\Delta)$ mit den Eigenschaften (C1) und (C2). Weiterhin ist die Hilbert-Transformation von ϕ durch (2.25) gegeben.

Folgerung: Gegeben sei das Intervall $I := [0, \lambda + 1]$ und die Zerlegung \mathbb{Z} von \mathbb{R} . Dann besitzt der eindeutig bestimmte Spline $\phi \in \mathcal{S}_\kappa$ aus Satz 2.14 die Darstellung

$$\phi(x) = CD_x^\mu N_\lambda(x)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ und dem B-Spline N_λ .

Beweis : Der B-Spline N_λ erfüllt die Eigenschaft (C1) und es gilt $M_0(N_\lambda) \neq 0$. Auf Grund von Lemma 2.11 verhält sich die Hilbert-Transformation $H_\mathbb{R}$ von $D_x^\mu N_\lambda(x)$ wie $\frac{1}{y^{\mu+1}}$. Wegen der Eindeutigkeit des normierten Splines ϕ aus Satz 2.14 folgt die Behauptung. #

Der Satz 2.14 gibt einen Zusammenhang zwischen dem Grad κ des Splines, der Anzahl der Momente μ , die verschwinden, und der Größe des Trägers λ an. Außerdem liefert der Beweis eine Möglichkeit zur Berechnung der Hilbert-Transformation $H_\mathbb{R}$ des Splines.

Die Asymptotik der Hilbert-Transformation $H_\mathbb{R}$ eines Splines mit Grad κ zur Zerlegung Δ ist also bereits durch die Anzahl der Zerlegungspunkte im Träger des Splines und die Anzahl der verschwindenden Momente eindeutig bestimmt. Will man umgekehrt einen Spline vom Grad κ konstruieren, dessen Hilbert-Transformation $H_\mathbb{R}$ ein bestimmtes Verhalten zeigt, so ist die “Größe des Trägers” (abgesehen von Skalierungen) von dieser Asymptotik bereits festgelegt.

2.6 Die Hilbert-Transformation auf \mathbb{T}

Nachdem im vorhergehenden Kapitel der Hilbert-Operator auf der reellen Achse vorgestellt worden ist, wollen wir jetzt das Pendant für periodische Funktionen kennenlernen.

Definition 2.15 Für $f \in L_2(\mathbb{T})$ ist der Hilbert-Operator H definiert durch

$$Hf(e^{i\tau}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{s-\tau}{2} f(e^{is}) ds. \quad (2.26)$$

Der Operator H ist wieder ein singulärer Integraloperator und somit als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen. Die Auswertung des Hilbert-Operators H auf den trigonometrischen Funktionen ergibt

$$\begin{aligned} H : \sin k\tau &\mapsto \cos k\tau \quad (k \in \mathbb{N}), \\ H : \cos k\tau &\mapsto -\sin k\tau \quad (k \in \mathbb{N}_0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Damit erhalten wir den Hilbert-Operator für die Funktionen t^k , $t \in \mathbb{T}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$H : t^k \mapsto i \operatorname{sgn} k t^k,$$

wobei wir $\operatorname{sgn} 0$ gleich Null setzen. Ist die Fourier-Reihe der Funktion $f \in L_2(\mathbb{T})$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k t^k$$

gegeben, so lautet die Hilbert-Transformation H nun

$$Hf(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn} k \hat{f}_k t^k.$$

Man beachte die Analogie zwischen der Berechnung von $H_{\mathbb{R}}$ und H . Der nächste Satz faßt einige weitere Eigenschaften zusammen, siehe auch [7, S. 334ff] und [27, S. 295 und 307].

Satz 2.16 1. Der Operator $H : W_2^k(\mathbb{T}) \rightarrow W_2^k(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist ein beschränkter linearer Operator mit

$$\|H\| = 1.$$

2. Der Hilbert-Operator ist translationsinvariant, d.h. für $f \in L_2(\mathbb{T})$ gilt

$$g(e^{i\tau}) := f(e^{i(\tau-s)}) \Rightarrow Hg(e^{i\tau}) = Hf(e^{i(\tau-s)}).$$

3. Differentiation und der Hilbert-Operator H sind vertauschbar.

4. Die Funktion $f = u + iv \in L_2(\mathbb{T})$ mit reellen Funktionen u und v ist genau dann Randfunktion einer holomorphen Funktion w aus $H_2(\mathbb{D})$, wenn die Funktionen u und v folgender Beziehung genügen:

$$u = Hv + u(0), \quad v = -Hu + v(0).$$

Dabei sind

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\tau}) d\tau, \quad v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{i\tau}) d\tau$$

die Mittelwerte der Funktionen u und v .

5. Für die periodische Faltung von $f \in L_2(\mathbb{T})$ und $g \in L_1(\mathbb{T})$

$$(f * g)(e^{i\tau}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is}) g(e^{i\tau-s}) ds, \quad \tau \in [-\pi, \pi],$$

haben wir

$$H(f * g) = (Hf) * g.$$

Bemerkung: Punkt 4 von Satz 2.16 gibt eine Charakterisierung der Funktionen f aus dem holomorphen Hardy-Raum auf \mathbb{T} .

Bemerkung: Der Hilbert-Operator H ist nicht mehr dilatationsinvariant, was Auswirkungen auf die Berechnung von $H\varphi$ haben wird.

Um einen Zusammenhang zwischen den beiden Hilbert-Operatoren $H_{\mathbb{R}}$ und H herzustellen, nehmen wir uns eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{T})$ her und definieren

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(e^{ix}), & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.28)$$

und untersuchen $H_{\mathbb{R}}\tilde{f}$. Wir definieren $H_k : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow C^s(-\pi, \pi)$ für $k \geq 1$ und $s \in \mathbb{N}_0$ durch

$$H_k f(y) := H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y + 2\pi k) + H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y - 2\pi k).$$

Wir bekommen

Lemma 2.17 Der Operator $H_k : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow C^s(-\pi, \pi)$ ist für $k \geq 2$ und $s \in \mathbb{N}_0$ beschränkt mit

$$\|H_k\| \leq C(s) \frac{1}{(k-1)^2}.$$

Beweis : Wir berechnen für $f \in L_2(\mathbb{T})$

$$\|H_k f\|_{C^s}^2 = \|H_k f\|_{L_2}^2 + \|D_y^s H_k f\|_{L_2}^2.$$

Dazu betrachten wir zunächst für $y \in [-\pi, \pi]$

$$D_y^l H_k f(y) = \frac{d^l}{dy^l} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{x - y - 2\pi k} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{x - y + 2\pi k} dx \right).$$

Der Träger von \tilde{f} ist laut Definition das Intervall $[-\pi, \pi]$ und folglich sind die Funktionen $\frac{1}{x-y-2\pi k}$ und $\frac{1}{x-y+2\pi k}$ für $k \geq 2$ beschränkte beliebig oft differenzierbare Funktionen. Somit läßt sich Differentiation und Integration vertauschen und wir erhalten

$$\begin{aligned} D_y^l H_k f(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{l! f(e^{ix})}{(x - y - 2\pi k)^{l+1}} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{l! f(e^{ix})}{(x - y + 2\pi k)^{l+1}} dx \\ &= \frac{l!}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ix}) \left(\frac{1}{(x - y - 2\pi k)^{l+1}} + \frac{1}{(x - y + 2\pi k)^{l+1}} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Für $l = 0$ ist

$$H_k f(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ix}) \frac{2(x - y)}{(x - y)^2 - 4\pi^2 k^2} dx$$

und wir bekommen mit $|x - y| \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \|H_k f\|_{L_2}^2 &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})| \frac{2|x - y|}{|(x - y)^2 - 4\pi^2 k^2|} dx \right)^2 dy \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \frac{16\pi^2}{(4\pi^2 k^2 - 4\pi^2)^2} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})|^2 dx dy \\ &\leq 4\pi^{-2} \frac{1}{(k^2 - 1)^2} \|f\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Ist $l = s$, so folgt aus $|x - y| \leq 2\pi$ und $k \geq 2$

$$|x - y \pm 2\pi k| \geq 2(k - 1)\pi.$$

Damit gelangen wir mittels (2.29) zu

$$\begin{aligned} |D_y^s H_k f(y)| &\leq \frac{s!}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})| \left(\frac{1}{(2(k - 1)\pi)^{s+1}} + \frac{1}{(2(k - 1)\pi)^{s+1}} \right) dx \\ &= \frac{s!}{2^s \pi^{s+2} (k - 1)^{s+1}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})| dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned}
 \|D_y^s H_k f\|_{L_2}^2 &\leq \frac{s!^2}{2^{2s}\pi^{2s+4}} \frac{1}{(k-1)^{2s+2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})| dx \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} dy \\
 &\leq \frac{s!^2}{2^{2s}\pi^{2s+4}} \frac{1}{(k-1)^{2s+2}} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})|^2 dx \\
 &= \frac{s!^2}{2^{2s-2}\pi^{2s+2}} \frac{1}{(k-1)^{2s+2}} \|f\|_{L_2}^2.
 \end{aligned}$$

Schließlich haben wir

$$\begin{aligned}
 \|H_k f\|_{C^s} &\leq \|f\|_{L_2} \left(2\pi^{-1} \frac{1}{k^2-1} + \frac{s!}{2^{s-1}\pi^{s+1}} \frac{1}{(k-1)^{s+1}} \right) \\
 &\leq \|f\|_{L_2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{(k-1)^2} \left(1 + \frac{s!}{2^s \pi^s} \right).
 \end{aligned}$$

Damit haben wir bekommen

$$\|H_k\| \leq \underbrace{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{s!}{2^s \pi^s} \right)}_{C(s) :=} \frac{1}{(k-1)^2}.$$

#

Folgerung: Für $f \in L_2(\mathbb{T})$ mit kompaktem Träger und $M_0(f) = \dots = M_{\mu-1}(f) = 0$ gilt

$$|D_y^s H_k f(y)| = \mathcal{O}(k^{-\mu-s-1}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Beweis : Nach Lemma 2.12 existiert eine Funktion $g \in W_2^\mu(\mathbb{T})$ mit $f = D^\mu g$. Durch Satz 2.9 lassen sich Differentiation und der Hilbert-Operator $H_{\mathbb{R}}$ vertauschen und die Aussage folgt aus (2.30). #

Folgerung: Für $f \in L_2(\mathbb{T})$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} H_k f \tag{2.31}$$

in jedem Raum $C^s(-\pi, \pi)$, $s \in \mathbb{N}_0$.

Der nächste Satz liefert uns den Zusammenhang zwischen den Operatoren H_k und dem Hilbert-Operator H auf dem Kreis \mathbb{T} .

Satz 2.18 Für eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{T})$ und der Funktion \tilde{f} definiert durch (2.28) gilt

$$Hf(e^{iy}) = H_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y) + H_1 f(y) + \sum_{k=2}^{\infty} H_k f(y). \tag{2.32}$$

Beweis : Mit Hilfe der Darstellung (2.29) von H_k für $l = 0$ bekommen wir auf Grund der Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} H_k f$ in $C^s(-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} H_k f(y) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{2(x-y)}{(x-y)^2 - 4\pi^2 k^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(x-y)}{(x-y)^2 - 4\pi^2 k^2} dx. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Reihen-Darstellung der Kotangens-Funktion

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2} \quad (2.33)$$

gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} H_k f(y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \cot \frac{x-y}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{x-y} - \frac{1}{\pi} \frac{2(x-y)}{(x-y)^2 - 4\pi^2} \right) f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{x-y}{2} f(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{x-y} dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{2(x-y)}{(x-y)^2 - 4\pi^2} dx \\ &= Hf(e^{iy}) - H_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y) - H_1 f(y). \end{aligned}$$

#

Bemerkung: Die Darstellung des Hilbert-Operators H im Satz 2.18 läßt sich wie folgt interpretieren: Sei Per der Operator, der einer Funktion $g \in L_2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger die Periodisierung

$$\text{Per } g(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + 2\pi k)$$

zuordnet. Satz 2.18 besagt dann

$$H \text{Per } \tilde{f} = \text{Per } H_{\mathbb{R}} \tilde{f},$$

wobei die Periodisierung auf der rechten Seite im Sinne eines Hauptwertes zu verstehen ist.

Im Folgenden wollen wir eine Darstellung von H mit Hilfe der Momente $M_l(\tilde{f})$ gewinnen analog zu der Darstellung im Satz 2.13. Wir erhalten

Satz 2.19 Für $f \in L_2(\mathbb{T})$ mit kompaktem Träger und \tilde{f} aus (2.28) gilt die Darstellung

$$Hf(e^{iy}) = H_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y) - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} M_l(\tilde{f}) \zeta(l+1, y)$$

für den Hilbert-Operator H mit den Funktionen

$$\zeta(l, x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(x + 2\pi k)^l} + \frac{1}{(x - 2\pi k)^l} \right]. \quad (2.34)$$

Beweis : Da der Träger von \tilde{f} kompakt ist, existieren alle Momente $M_l(\tilde{f})$ von \tilde{f} . Somit bekommen wir mittels Satz 2.13 und (2.32)

$$\begin{aligned} Hf(e^{iy}) &= H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y+2\pi k) + H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y-2\pi k) \right) \\ &= H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M_l(\tilde{f})}{(y+2\pi k)^{l+1}} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M_l(\tilde{f})}{(y-2\pi k)^{l+1}} \right]. \end{aligned}$$

Wir vertauschen die Summationsreihenfolge und gelangen zu

$$\begin{aligned} Hf(e^{iy}) &= H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y) - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} M_l(\tilde{f}) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(y+2\pi k)^{l+1}} + \frac{1}{(y-2\pi k)^{l+1}} \right] \\ &= H_{\mathbb{R}}\tilde{f}(y) - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} M_l(\tilde{f}) \zeta(l+1, y). \end{aligned}$$

Sei $[-a, a] \subset [-\pi, \pi]$ der Träger von \tilde{f} . Die Abschätzung

$$|M_l(\tilde{f})| \leq \int_{-a}^a |\tilde{f}| |x|^l dx \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2l+1}} a^{l+\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(y+2\pi k)^{l+1}} + \frac{1}{(y-2\pi k)^{l+1}} \right| \leq \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & l=0 \\ \frac{2}{\pi^{l+1}} \left(1 + \frac{1}{2l}\right), & l>0 \end{cases}$$

zeigt die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} M_l(\tilde{f}) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(y+2\pi k)^{l+1}} + \frac{1}{(y-2\pi k)^{l+1}} \right]$$

für jedes $y \in [-\pi, \pi]$, was die Vertauschung der Summationsreihenfolge legitimiert. #

Die Funktionen $\zeta(l, x)$ aus Satz 2.19 sind Summen der verallgemeinerten Zeta-Funktion und können explizit angegeben werden. Mit Hilfe der Kotangens-Entwicklung (2.33) erhält man

$$\zeta(1, x) = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{x}.$$

Durch wiederholte Differentiation ergibt sich

$$\zeta(l, x) = (-1)^{l-1} \frac{1}{(l-1)!} \frac{1}{2} D_x^{l-1} \left(\cot \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{x^l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Einige der Funktionen $\zeta(l, x)$ sind in Tabelle 2.2 explizit angegeben. Von besonderem Interesse sind die Funktionen $\zeta(2l+1, x)$, $l \in \mathbb{N}_0$. Der nächste Satz faßt einige Eigenschaften zusammen.

l	1	2	3
$\zeta(l, x)$	$\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$	$\frac{1}{4} (1 + \cot^2 \frac{x}{2}) - \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{8} \cot \frac{x}{2} (1 + \cot^2 \frac{x}{2}) - \frac{1}{x^3}$

 Tabelle 2.2: Funktionen $\zeta(l, x)$

Satz 2.20 Für die Funktionen $\zeta(2l+1, x)$, $l \in \mathbb{N}_0$, gilt

1. $\zeta(2l+1, -x) = -\zeta(2l+1, x)$,
2. $\zeta(2l+1, x)$ ist monoton fallend auf $[-\pi, \pi]$,
3. $\zeta(2l+1, -\pi) = \pi^{-2l-1}$.

Beweis :

zu 1. Nach Definition von $\zeta(2l+1, x)$ haben wir

$$\begin{aligned} \zeta(2l+1, -x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(-x+2\pi k)^{2l+1}} + \frac{1}{(-x-2\pi k)^{2l+1}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{(x-2\pi k)^{2l+1}} - \frac{1}{(x+2\pi k)^{2l+1}} \right] = -\zeta(2l+1, x). \end{aligned}$$

zu 2. Wir differenzieren die Funktion $\zeta(2l+1, x)$ und bekommen

$$\begin{aligned} \zeta'(2l+1, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-2l-1}{(x+2\pi k)^{2l+2}} + \frac{-2l-1}{(x-2\pi k)^{2l+2}} \right] \\ &= -(2l+1) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+2\pi k)^{2l+2}} + \frac{1}{(x-2\pi k)^{2l+2}} \right]. \end{aligned}$$

Alle Summanden sind positiv und somit ist $\zeta'(2l+1, x) \leq 0$. Folglich ist $\zeta(2l+1, x)$ monoton fallend.

zu 3. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \zeta(2l+1, -\pi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(-\pi+2\pi k)^{2l+1}} + \frac{1}{(-\pi-2\pi k)^{2l+1}} \right] \\ &= \pi^{-2l-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2k-1)^{2l+1}} - \frac{1}{(2k+1)^{2l+1}} \right]. \end{aligned}$$

Die letzte Reihe ist eine Teleskop-Reihe mit Summe 1.

#

Die numerische Auswertung des Hilbert-Operators H wird dann näher im Kapitel 3 beschrieben.

2.7 Riemann-Hilbert Probleme

Riemann-Hilbert Probleme sind Randwertaufgaben der Funktionentheorie und werden erstmals in der Dissertation [38] von Riemann erwähnt. Gesucht ist eine holomorphe Funktion w in einem Gebiet G , dessen Randwerte auf ∂G im Sinne von nichttangentialen Grenzwerten bestimmte Randbedingungen erfüllen. Wir unterscheiden dabei lineare Randbedingungen und den nichtlinearen Fall. Im Folgenden werden wir uns ausschließlich mit dem Fall $G = \mathbb{D}$ befassen und stellen bekannte Resultate vor. Dabei folgen wir den Ausführungen in [44]. Für weitere Informationen und Beweise der Aussagen verweisen wir auf [44, 48].

2.7.1 Lineare Riemann-Hilbert Probleme

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall. Für eine gegebene Funktion $c \in L_2(\mathbb{T})$ suchen wir eine holomorphe Funktion $w = u + iv \in H_2(\mathbb{D})$, dessen Randfunktion auf \mathbb{T} die Bedingung

$$\operatorname{Re}(w(t)) = c(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

erfüllt. Die Lösung dieses Problems kann mit Hilfe des Hilbert-Operators H explizit angegeben werden. Nach Satz 2.16 ist die Lösung durch

$$w(t) = c(t) - i(Hc(t) + d), \quad d \in \mathbb{R},$$

gegeben. Dieses einfache Beispiel zeigt bereits, dass die Lösung nicht eindeutig bestimmt ist. Allgemeiner betrachten wir die Randbedingung

$$\operatorname{Re}(\overline{f(t)}w(t)) = c(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (2.35)$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = a(t) + ib(t)$, $t \in \mathbb{T}$. Ausgeschrieben lautet die Bedingung (2.35)

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) = c(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Wir suchen also eine im Einheitskreis \mathbb{D} holomorphe Funktion w , so dass die Werte der Randfunktion für fast alle $t \in \mathbb{T}$ auf den Geraden

$$a(t)x + b(t)y = c(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

liegen. Um dieses Problem zu lösen, setzen wir voraus, dass die Funktion f auf \mathbb{T} nicht verschwindet und betragsmäßig gleich eins für alle $t \in \mathbb{T}$ ist. Weiterhin sei die Windungszahl von f um den Ursprung Null. Unter den Voraussetzungen an die Funktion f können

wir einen stetigen Zweig des Arguments von f wählen und bezeichnen die Funktion mit $\phi \in C(\mathbb{T})$. Somit besitzt die Funktion f die Gestalt

$$f(t) = e^{i\phi(t)}.$$

Als nächstes definieren wir die Funktion $\tilde{w}(t) = \exp(-H\phi(t) + i(\frac{\pi}{2} - \phi(t))) w(t)$ und bekommen mittels

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\overline{f(t) \exp \left(H\phi(t) + i \left(\frac{\pi}{2} - \phi(t) \right) \right)} \exp \left(-H\phi(t) + i \left(\frac{\pi}{2} - \phi(t) \right) \right) w(t) \right) &= c(t), \\ \operatorname{Re} \left(i \exp(H\phi(t)) \tilde{w}(t) \right) &= c(t), \\ \operatorname{Re}(-i \exp(H\phi(t)) \tilde{w}(t)) &= c(t), \\ \operatorname{Im}(\exp(H\phi(t)) \tilde{w}(t)) &= c(t) \end{aligned}$$

ein lineares Riemann-Hilbert Problem für \tilde{w} . Nach Satz 2.16 ist die Lösung für dieses Problem durch

$$\tilde{w}(t) = d + H \left(\frac{c}{\exp(H\phi)} \right) (t) + i \frac{c(t)}{\exp(H\phi(t))}$$

mit $d \in \mathbb{R}$ gegeben. Schließlich erhalten wir für w

$$w(t) = -i \exp(H\phi(t) + i\phi(t)) \tilde{w}(t).$$

Damit haben wir teilweise gezeigt:

Satz 2.21 *Sei $c \in L_2(\mathbb{T})$ und $f = e^{i\phi} \in C(\mathbb{T})$ und wind $f = 0$. Dann ist die Lösungsmenge des linearen Riemann-Hilbert Problems (2.35) in $H_2(\mathbb{T})$ der affine Unterraum $\{w_d = w_0(d + \tilde{w}) : d \in \mathbb{R}\}$ mit den Funktionen*

$$\begin{aligned} w_0(t) &= -i \exp(H\phi(t) + i\phi(t)), \\ \tilde{w}(t) &= H \left(\frac{c}{|w_0|} \right) (t) + i \frac{c(t)}{|w_0(t)|}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Funktionen w_d in $H_2(\mathbb{T})$ liegen und dass es keine weiteren Lösungen geben kann. Details dazu befinden sich in [44, Kapitel 1.7].

Eine Aussage über die Regularität der Lösung liefert der nächste Satz.

Satz 2.22 [44, S. 26] *Mit w_d bezeichnen wir die Lösung des linearen Riemann-Hilbert Problems (2.35) aus Satz 2.21. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.21 gilt:*

Wenn $f, c \in W_2^k(\mathbb{T})$ mit $k \in \mathbb{N}$, so ist $w_d \in W_2^k(\mathbb{T})$.

Satz 2.21 zeigt, dass bei der Lösung des linearen Riemann-Hilbert Problems (2.35) eine frei wählbare reelle Konstante d auftritt. Durch eine zusätzliche Nebenbedingung kann der Wert von d festgesetzt werden. In Anwendungen treten dabei vorwiegend die folgenden Bedingungen auf:

$$w(1) = W = U + iV, \quad W \in \mathbb{C} \text{ bzw. } U, V \in \mathbb{R}, \quad (2.36)$$

$$\alpha u(1) + \beta v(1) = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

$$\alpha u(0) + \beta v(0) = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

Bedingung (2.36) ist nur dann sinnvoll, wenn die Lösung w_d im Punkt $t = 1$ stetig ist und der Punkt W mit der Randbedingung

$$a(1)U + b(1)V = c(1)$$

vereinbar ist. Unter diesen Voraussetzungen ist die eindeutige Lösung von (2.35) und (2.36) durch Satz 2.21 gegeben mit

$$d = \frac{W}{w_0(1)} - \tilde{w}(1). \quad (2.39)$$

Die Nebenbedingung (2.37) führt zu einer eindeutigen Lösung, falls

$$a(1)\beta - b(1)\alpha \neq 0,$$

und der entsprechende Wert für d ist durch (2.39) gegeben mit $W = U + iV$ und

$$U := \frac{c(1)\beta - b(1)\gamma}{a(1)\beta - b(1)\alpha},$$

$$V := \frac{a(1)\gamma - c(1)\alpha}{a(1)\beta - b(1)\alpha}.$$

Da die Lösung im Nullpunkt verschwinden kann, ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Nebenbedingung (2.38) zu erfüllen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung ist

$$\beta \cos \delta - \alpha \sin \delta \neq 0,$$

wobei δ durch

$$\delta := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\tau}) d\tau$$

definiert ist. Um den dazugehörigen Wert d zu bestimmen, berechnen wir die Werte von w_0 und \tilde{w} im Nullpunkt. Wir bekommen

$$w_0(0) = -i \exp(H\phi(0) + i\phi(0)) = -i \exp(i\delta) = \sin \delta - i \cos \delta,$$

$$\tilde{w}(0) = i\eta := \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(e^{i\tau}) \exp(-H\phi(e^{i\tau})) d\tau.$$

Dabei bezeichnet $H\phi + i\phi$ nicht nur die Randfunktion, sondern auch die holomorphe Fortsetzung der Funktion in den Einheitskreis \mathbb{D} . Schließlich gelangen wir zu

$$w_d(0) = (\sin \delta - i \cos \delta) (d + i\eta),$$

was zu

$$d = \frac{\eta (\alpha \cos \delta + \beta \sin \delta) - \gamma}{\beta \cos \delta - \alpha \sin \delta} \quad (2.40)$$

führt.

Abschließend befassen wir uns mit dem Fall, dass die Windungszahl von f nicht verschwindet. Wir beginnen mit $\kappa = \text{wind } f > 0$.

Satz 2.23 *Sei $f = e^{i\phi} \in C(\mathbb{T})$ und $\kappa = \text{wind } f > 0$. Dann besitzt das lineare Riemann-Hilbert Problem (2.35) für jedes $c \in L_2(\mathbb{T})$ eine Lösung $w \in H_2(\mathbb{T})$ und die homogene Gleichung besitzt $2\kappa + 1$ reell linear unabhängige Lösungen.*

Beweis : Wir definieren $g(t) = f(t)t^{-\kappa}$ und $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_{\kappa-1}z^{\kappa-1}$ mit beliebigem $c_k \in \mathbb{C}$. Da $\text{wind } g = 0$ besitzt das Problem

$$\text{Re} \left(\overline{g(t)} \tilde{w}(t) \right) = c(t) - \text{Re} \left(\overline{f(t)} P(t) \right) \quad (2.41)$$

nach Satz 2.21 stets eine Lösung \tilde{w} mit frei wählbarem Parameter. Für die Funktion $w(z) = z^\kappa \tilde{w}(z) + P(z)$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\overline{f(t)} w(t) \right) &= \text{Re} \left(\overline{f(t)} t^\kappa \tilde{w}(t) + \overline{f(t)} P(t) \right) \\ &= \text{Re} \left(\overline{f(t)} t^{-\kappa} \tilde{w}(t) \right) + \text{Re} \left(\overline{f(t)} P(t) \right) \\ &= c(t) - \text{Re} \left(\overline{f(t)} P(t) \right) + \text{Re} \left(\overline{f(t)} P(t) \right) = c(t). \end{aligned}$$

Also löst die Funktion w das Ausgangsproblem und verfügt insgesamt über $2\kappa + 1$ freie reelle Parameter. Die Koeffizienten $c_0, \dots, c_{\kappa-1}$ liefern dabei 2κ reelle Parameter und ein Parameter tritt bei der Lösung des Problems (2.41) auf. Tatsächlich besitzt jede Lösung diese Form. Ist w eine Lösung des Ausgangsproblems, so wählen wir das Polynom P so, dass $w - P$ eine κ -fache Nullstelle in $z = 0$ hat. Dann ist

$$\tilde{w}(z) = z^{-\kappa} (w(z) - P(z))$$

Lösung des Problems (2.41).

#

Im Falle von $\kappa = \text{wind } f < 0$ erhalten wir

Satz 2.24 Sei $f = e^{i\phi} \in C(\mathbb{T})$ und $\kappa = \text{wind } f < 0$. Dann besitzt das homogene lineare Riemann-Hilbert Problem (2.35) nur die Lösung $w \equiv 0$. Das inhomogene Problem ist für $c \in L_2(\mathbb{T})$ in $H_2(\mathbb{T})$ genau dann lösbar, wenn die Bedingungen

$$\int_0^{2\pi} \tilde{c}(e^{i\tau}) e^{ik\tau} d\tau = 0, \quad k = 0, \dots, |\kappa| - 1$$

mit den Funktionen $\tilde{c}(t) := c(t) \exp(-H\tilde{\phi}(t))$ und $\tilde{\phi}(t) := \arg(t^{-\kappa} f(t))$ erfüllt sind.

Beweis : Wir untersuchen das lineare Riemann-Hilbert Problem

$$\operatorname{Re} \left(\overline{f(t)} w(t) \right) = \operatorname{Re} \left(\overline{f(t) t^{-\kappa}} \underbrace{t^{-\kappa} w(t)}_{=: \tilde{w}} \right) = c(t).$$

Wegen $\text{wind } f(t) t^{-\kappa} = 0$ ist w Lösung des linearen Riemann-Hilbert Problems (2.35) genau dann, wenn \tilde{w} Lösung des Problems

$$\operatorname{Re} \left(\overline{f(t) t^{-\kappa}} \tilde{w}(t) \right) = c(t) \tag{2.42}$$

ist und \tilde{w} eine $|\kappa|$ -fache Nullstelle im Punkt $z = 0$ hat. Die Lösung von (2.42) ist nach Satz 2.21 explizit bekannt. Die Bedingung, dass \tilde{w} eine $|\kappa|$ -fache Nullstelle im Punkt $z = 0$ besitzt, ist äquivalent zum Verschwinden der Fourier-Koeffizienten $c_0, \dots, c_{-\kappa-1}$ von \tilde{w} . Dies stimmt mit dem im Satz angegebenen Bedingungen überein. #

Zum Schluß definieren wir den sogenannten *Riemann-Hilbert Operator*

$$R_f : H_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T}), \quad w(t) \mapsto \operatorname{Re} \left(\overline{f(t)} w(t) \right)$$

mit einer stetigen Funktion f , welche oftmals auch als Symbol des linearen Riemann-Hilbert Problems bezeichnet wird. Der Operator R_f ist linear und beschränkt. Mittels der Sätze 2.21, 2.23 und 2.24 bekommen wir

$$\begin{aligned} \dim \ker R_f &= \max(0, 2\kappa + 1), \\ \operatorname{codim} \operatorname{im} R_f &= \max(0, -2\kappa - 1). \end{aligned}$$

Dabei ist κ die Windungszahl von f um den Ursprung. Somit gilt für den Index des Operators R_f

$$\operatorname{index} R_f := \dim \ker R_f - \operatorname{codim} \operatorname{im} R_f = 2\kappa + 1.$$

Der Index von R_f ist also mit geometrischen Eigenschaften des Symbols f verknüpft.

2.7.2 Nichtlineare Riemann-Hilbert Probleme

Beim linearen Riemann-Hilbert Problem (2.35) haben wir gesehen, dass die Randwerte der Funktion w auf Geraden liegen sollen. Allgemein fordern wir jetzt, dass $w(t)$ für $t \in \mathbb{T}$ auf einer beliebigen Kurve M_t in \mathbb{C} liegt. Die Kurven M_t bezeichnen wir als Zielkurven und die Menge

$$M := \bigcup_{t \in \mathbb{T}} \{t\} \times M_t \subseteq \mathbb{T} \times \mathbb{C}$$

als Zielmannigfaltigkeit. Für eine Funktion f auf \mathbb{T} definieren wir die *Spur von f* durch

$$\text{tr } f := \{(t, f(t)) : t \in \mathbb{T}\}.$$

Damit läßt sich das nichtlineare Riemann-Hilbert Problem wie folgt formulieren:

Sei $\{M_t\}$ eine Familie von Kurven in der komplexen Ebene. Finde alle Funktionen w , die in \mathbb{D} holomorph und auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetig sind, so dass die Randbedingung

$$w(t) \in M_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad \text{bzw.} \quad \text{tr } w \subseteq M \quad (2.43)$$

erfüllt ist.

Für Funktionen w , die in \mathbb{D} holomorph und auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetig sind, notieren wir $w \in H_\infty \cap C$. Die Randfunktion der holomorphen Funktion soll also beschränkt und stetig sein.

Wir unterscheiden Riemann-Hilbert Probleme mit geschlossenen und mit nicht geschlossenen Zielkurven. Genauer reden wir von *Riemann-Hilbert Problemen vom Typ A* und schreiben $M \in \mathcal{A}$, falls M sich in der Form

$$M = \{(t, \mu(t, s)) : t, s \in \mathbb{T}\}$$

mit der Funktion $\mu : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ darstellen läßt. Die Funktion μ soll dabei die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(A1) \quad \mu \in C^1(\mathbb{T}^2),$$

$$(A2) \quad 0 < \frac{1}{C} \leq |D_\sigma \mu| \leq C,$$

$$(A3) \quad \mu_t : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto \mu(t, s) \text{ ist für jedes } t \in \mathbb{T} \text{ injektiv.}$$

Mit $D_\tau \mu(t, s)$ und $D_\sigma \mu(t, s)$ sind die partiellen Ableitungen der Funktion $(\tau, \sigma) \mapsto \mu(e^{i\tau}, e^{i\sigma})$ bezüglich τ und σ ausgewertet im Punkt $(t, s) = (e^{i\tau}, e^{i\sigma})$ gemeint. Der Prototyp eines

Riemann-Hilbert Problems vom Typ A ist das Problem der konformen Abbildung von \mathbb{D} auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet G mit stetig differenzierbarem Rand ∂G , indem wir $M_t := \partial G$ für $t \in \mathbb{T}$ setzen. Für die Existenz einer Lösung des Riemann-Hilbert Problems vom Typ A spielt die Geometrie der Mannigfaltigkeit M eine große Rolle. Aus diesem Grund unterteilen wir Riemann-Hilbert Probleme vom Typ A nochmals in drei Klassen. Dazu definieren wir das Innere von M als die beschränkte Komponente von $\mathbb{T} \times \mathbb{C} \setminus M$ in $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ und bezeichnen dies mit $\text{int } M$. Das Riemann-Hilbert Problem $M \in \mathcal{A}$ gehört zur Klasse \mathcal{R} der regulären Probleme, wenn eine Funktion $w_M \in H_\infty \cap C$ mit

$$\text{tr } w_M \subseteq \text{int } M$$

existiert. Wir schreiben dann $M \in \mathcal{R}$. Um die Lösungen regulärer Probleme zu charakterisieren, benötigen wir die Definition der Windungszahl einer Funktion um die Mannigfaltigkeit M .

Definition 2.25 Sei $M \in \mathcal{A}$ eine Zielmannigfaltigkeit und f eine stetige Funktion auf \mathbb{T} mit $\text{tr } f \subseteq M$. Die Windungszahl von f um M ist durch

$$\text{wind}_M f := \text{wind } (f - m)$$

definiert, wobei $m \in C(\mathbb{T})$ eine beliebige Funktion mit $\text{tr } m \subseteq \text{int } M$ ist.

Der nächste Satz liefert uns die Lösbarkeit regulärer Riemann-Hilbert Probleme vom Typ A.

Satz 2.26 [44, Satz 2.5.1] Sei $M \in \mathcal{R}$ und $w_M \in H_\infty \cap C$ mit $\text{tr } w_M \subseteq \text{int } M$. Dann gilt:

- (i) Für beliebige Punkte $t_0 \in \mathbb{T}$ und $W_0 \in M_{t_0}$ existiert genau eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$ mit $\text{wind}_M w = 0$, welche die Randbedingung

$$w(t) \in M_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad (2.44)$$

und die Nebenbedingung

$$w(t_0) = W_0 \quad (2.45)$$

erfüllt.

- (ii) Für $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $W_0 \in M_{t_0}$ und paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ existiert genau eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$ mit $\text{wind } w = n$, welche die Interpolationsbedingungen

$$w(z_k) = w_M(z_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

und die Bedingungen (2.44), (2.45) erfüllt.

Bemerkung: Es gibt also keine Lösung mit einer negativen Windungszahl um M und die Lösungen mit Windungszahl 0 überdecken die Zielmannigfaltigkeit M schlicht.

Die Zielmannigfaltigkeit $M \in \mathcal{A}$ gehört der Klasse der singulären Probleme an, $M \in \mathcal{S}$, wenn sie nicht regulär ist und es eine Funktion $w_M \in H_\infty \cap C$ mit

$$\text{tr } w_M \subseteq \text{clos int } M$$

gibt. Dabei bezeichnet clos den topologischen Abschluß einer Menge. Die Lösbarkeit solcher Probleme unterscheidet sich stark von denen der regulären Probleme.

Satz 2.27 [44, Satz 2.5.3] *Sei $M \in \mathcal{S}$. Weiterhin sei die Funktion $w_M \in H_\infty \cap C$ mit $\text{tr } w_M \subseteq \text{clos int } M$. Dann gilt:*

(i) *Die Funktion w_M ist die einzige Lösung des Riemann-Hilbert Problems*

$$w(t) \in M_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

(ii) *Die Windungszahl von w_M um M ist negativ.*

Ist das Problem $M \in \mathcal{A}$ weder regulär noch singulär, so schreiben wir $M \in \mathcal{N}$.

Satz 2.28 [44, Satz 2.5.4] *Sei $M \in \mathcal{N}$. Dann existiert keine Funktion $w \in H_\infty \cap C$, welche das Riemann-Hilbert Problem*

$$w(t) \in M_t, \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

löst.

Neben Riemann-Hilbert Problemen vom Typ A sprechen wir von Riemann-Hilbert Problemen vom Typ B, wenn die Zielmannigfaltigkeit M die Darstellung

$$M = \{(t, \mu(t, s)) : t \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{R}\}$$

besitzt und die Funktion μ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(B1) $\mu \in C^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$,

(B2) $0 < \frac{1}{C} \leq |D_s \mu| \leq C$,

(B3) $\mu_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto \mu(t, s)$ ist für jedes $t \in \mathbb{T}$ injektiv,

(B4) die Grenzwerte

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} D_s \mu(t, s) =: \mu^\pm(t), \quad \lim_{s \rightarrow \pm\infty} D_t \mu(t, s) s^{-2} = 0$$

existieren gleichmäßig bezüglich t .

Wir schreiben dann $M \in \mathcal{B}$. Beispiele für Riemann-Hilbert Probleme vom Typ B sind lineare Riemann-Hilbert Probleme mit stetig differenzierbaren Funktionen a, b und c . Die Lösung dieser Probleme ist wieder stark von der Geometrie der Mannigfaltigkeit M abhängig. Dazu definieren wir den Index von M :

$$\text{ind } M := 2 \text{ wind } \mu^+.$$

Damit gelangen wir zu

Satz 2.29 [44, Satz 2.6.2] *Sei $M \in \mathcal{B}$. Dann gilt:*

- (i) *Wenn $\text{ind } M < 0$ existiert höchstens eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$ von*

$$w(t) \in M_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \quad (2.46)$$

- (ii) *Sei $\text{ind } M = 0$ und $t_0 \in \mathbb{T}$, $W_0 \in M_{t_0}$ beliebig. Dann existiert genau eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$ von (2.46), welche die Anfangsbedingung*

$$w(t_0) = W_0 \quad (2.47)$$

erfüllt.

- (iii) *Falls $\text{ind } M = 2n > 0$ ist, dann existiert für beliebige Punkte $t_0 \in \mathbb{T}$, $W_0 \in M_{t_0}$, $W_1, \dots, W_n \in \mathbb{C}$ und paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ genau eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$ von (2.46) und (2.47), welche die zusätzlichen Interpolationsbedingungen*

$$w(z_k) = W_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

erfüllt.

Riemann-Hilbert Probleme vom Typ B besitzen eine orientierte Zielmannigfaltigkeit. Das Gegenstück sind Riemann-Hilbert Probleme vom Typ C. Wir notieren $M \in \mathcal{C}$, wenn die Mannigfaltigkeit

$$\widetilde{M} := \{(t, w) \in \mathbb{T} \times \mathbb{C} : (t^2, w) \in M\}$$

zur Klasse \mathcal{B} gehört, aber M selbst nicht. Der Index

$$\text{ind } M := \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{M}$$

ist immer ungerade. Für die Lösung von Riemann-Hilbert Problemen vom Typ C bekommen wir

Satz 2.30 [44, Satz 2.7.1] *Sei $M \in \mathcal{C}$. Dann gilt:*

- (i) *Wenn $\text{ind } M \leq -1$ existiert höchstens eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$ des Riemann-Hilbert Problems*

$$w(t) \in M_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \quad (2.48)$$

- (ii) *Ist $\text{ind } M = -1$, dann besitzt (2.48) genau eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$.*

- (iii) *Wenn $\text{ind } M = 2n - 1 \geq 1$ ist, dann existiert für paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ und beliebige Punkte $W_1, \dots, W_n \in \mathbb{C}$ genau eine Lösung $w \in H_\infty \cap C$ von (2.48), welche die Interpolationsbedingungen*

$$w(z_k) = W_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

erfüllt.

Zum Abschluß geben wir eine Aussage über die Regularität der Lösung an.

Satz 2.31 [44, Satz 2.8.1] *Sei $k \in \mathbb{N}$ und die Mannigfaltigkeit M gehört entweder zur Klasse \mathcal{A} , \mathcal{B} oder \mathcal{C} . Weiterhin sei $w \in H_\infty \cap C$ die Lösung des Riemann-Hilbert Problems $\text{tr } w \subseteq M$. Für die Funktion μ , welche die Zielmannigfaltigkeit repräsentiert, gelte $\mu \in C^k(\mathbb{T}^2)$ beziehungsweise $\mu \in C^k(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$. Dann ist $w \in W_2^k(\mathbb{T})$.*

3 Wavelet-Methoden für die Hilbert-Transformation

In diesem Kapitel widmen wir uns der Berechnung der Hilbert-Transformation H mit Hilfe von Wavelets. Dabei verwenden wir sowohl die periodischen als auch die nicht periodischen biorthogonalen B-Spline Wavelets, deren Filter-Koeffizienten in Tabelle 2.1 gegeben sind. Da die Skalierungsfunktion φ der B-Spline der Ordnung m ist und wegen der Skalierungsgleichung (2.15), ist das Wavelet ψ ein Spline vom Grad m . Wir beschränken uns auf den Fall, dass m ungerade ist. Für eine 1-periodische Funktion u aus $W_2^s \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $s \leq m$, ist ihre Wavelet-Darstellung durch

$$u(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

gegeben. Da der Hilbert-Operator H in W_2^s nach Satz 2.16 linear und beschränkt ist, bekommen wir für die Hilbert-Transformation

$$Hu(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} H\varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} H\psi_{j,k}(x). \quad (3.1)$$

Aus diesem Grund widmen wir uns der effizienten Berechnung von $H\varphi$ und $H\psi$.

Anschließend beschäftigen wir uns mit der Berechnung von (3.1) sowohl auf einem gleichmäßigen als auch ungleichmäßigen Gitter. Danach stellen wir eine Möglichkeit vor, welche die Hilbert-Transformation adaptiv berechnet. Zum Schluss beurteilen wir dieses Verfahren und geben einige numerische Ergebnisse an.

3.1 Hilbert-Transformation der Wavelets auf \mathbb{R} und \mathbb{T}

Sowohl die Skalierungsfunktion ${}_m\varphi$ als auch das zugehörige Wavelet ${}_{m,\tilde{m}}\psi$, wobei $m + \tilde{m}$ gerade ist, ist ein Spline vom Grad m zur Knotenmenge \mathbb{Z} beziehungsweise $2^{-1}\mathbb{Z}$. Betrachten wir das Intervall $I = [-\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}]$ und die Unterteilung \mathbb{Z} von \mathbb{R} , so erkennen wir, dass die Funktion ${}_m\varphi$ die Bedingungen (C1) und (C2) aus Kapitel 2.5 mit $\mu = 0$ erfüllt. Demzufolge ist ${}_m\varphi$ der Spline aus Satz 2.14. Somit verhält sich die Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}}$ von ${}_m\varphi$ nach Satz 2.13 asymptotisch wie $\frac{1}{y}$.

Desgleichen untersuchen wir die Funktion ${}_{m,\tilde{m}}\psi$. Der Träger von ${}_{m,\tilde{m}}\psi$ ist $I = [-\frac{m+\tilde{m}}{2}, \frac{m+\tilde{m}}{2} + 1]$ und wir setzen $\Delta = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}\}$ als Zerlegung von \mathbb{R} . Folglich ist mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2.5 $\kappa = m$ und $\lambda = 2 + m + \tilde{m}$. Um die Anzahl der Momente $M_k({}_{m,\tilde{m}}\psi)$ zu bestimmen, die verschwinden, betrachten wir die Momente von ${}_m\varphi$. Auf Grund der Symmetrie ${}_m\varphi(x) = {}_m\varphi(-x)$ folgt

$$M_{2l+1}({}_m\varphi) = 0, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Die restlichen Momente bezeichnen wir mit $a_l := M_{2l}({}_m\varphi)$, $l \in \mathbb{N}_0$. Tabelle 3.1 zeigt die ersten sieben Werte von a_l für $m = 1$ und $m = 3$. Für die Momente von ${}_m\varphi_{1,k}$ bekommen wir jetzt für $l \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ (wir definieren $0^0 := 1$)

$$\begin{aligned} M_l({}_m\varphi_{1,k}) &= \int_{\mathbb{R}} x^l {}_m\varphi(2x - k) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{y+k}{2}\right)^l {}_m\varphi(y) \frac{dy}{2} \\ &= 2^{-l-1} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} k^{l-j} \int_{\mathbb{R}} y^j {}_m\varphi(y) dy \\ &= 2^{-l-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \binom{l}{2j} k^{l-2j} a_j. \end{aligned}$$

m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{91}$
3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{17}{42}$	$\frac{31}{45}$	$\frac{15}{11}$	$\frac{5461}{1820}$

Tabelle 3.1: Momente a_l

Da das Wavelet $_{m,\tilde{m}}\psi$ die Skalierungsfunktion (2.15) erfüllt, folgt schließlich

$$\begin{aligned} M_l \left(_{m,\tilde{m}}\psi \right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} g_k M_l \left(_m\varphi_{1,k} \right) \\ &= 2^{-l-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \binom{l}{2j} a_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} g_k k^{l-2j} \end{aligned}$$

mit den Filter-Koeffizienten g_k aus Tabelle 2.1 und (2.16). Es ist also ausreichend zu prüfen, wann

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k k^l = 0.$$

Wir erhalten

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k k^l = 0$$

für $l = 0, \dots, \tilde{m}$. Demzufolge ist $\mu = \tilde{m} + 1$ und es gilt $\kappa + \mu + 1 = m + \tilde{m} + 2 = \lambda$. Damit entspricht $_{m,\tilde{m}}\psi$ dem Spline aus Satz 2.14 und die Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}} _{m,\tilde{m}}\psi$ fällt wie $y^{-\tilde{m}-2}$. Dies rechtfertigt auch die Verwendung der biorthogonalen B-Spline Wavelets, da sie in gewissem Sinn optimal für die Berechnung der Hilbert-Transformation sind.

Wir beginnen mit der Berechnung von $H_{\mathbb{R}}$. Es ist ausreichend, die Hilbert-Transformation von $_m\varphi$ zu berechnen, da der Hilbert-Operator $H_{\mathbb{R}}$ dilatationsinvariant ist und die Wavelets $_{m,\tilde{m}}\psi$ der Skalierungsgleichung (2.15) genügen. Dies kann mit Hilfe von (2.25) und für große Werte mit Satz 2.13 geschehen. Die Darstellung in Satz 2.13 läßt sich aber verbessern, indem wir ausnutzen, dass die ungeraden Momente von $_m\varphi$ verschwinden. Wir bekommen für $|y| > \frac{m+1}{2}$

$$H_{\mathbb{R}} _m\varphi(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{y^{2l+1}} \quad (3.2)$$

mit den Momenten a_l , welche zum Teil in Tabelle 3.1 aufgelistet sind. Das Verhalten der Momente a_l läßt sich durch

$$\begin{aligned} |a_l| &\leq 2 \int_0^{\frac{m+1}{2}} \left| _m\varphi(x) x^{2l} \right| dx \\ &\leq 2 \left(\int_0^{\frac{m+1}{2}} | _m\varphi(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{m+1}{2}} x^{4l} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{4l+1}} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{2l+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

abschätzen. Ist $y > \frac{m+1}{2}$, so bekommen wir für (3.2) eine geometrische Reihe als konvergente Vergleichsreihe.

Der periodische Hilbert-Operator H kann für periodische Splines im allgemeinen nicht explizit angegeben werden. Man bekommt dabei sogenannte Polylogarithmus-Funktionen

$$\operatorname{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}.$$

Aus diesem Grund verwenden wir die Darstellung von H aus Satz 2.19 und führen somit die Berechnung von $H\varphi_{j,0}$ und $H\psi_{j,0}$, $j \in \mathbb{N}$, auf die Auswertung von $H_{\mathbb{R}^m}\varphi_{j,0}$ zurück. Die numerischen Aspekte werden im folgenden Kapitel behandelt.

3.2 Numerische Berechnung von der Hilbert-Transformation der Wavelets

Zur Auswertung von $H\psi_{j,0}$ und $H\varphi_{j,0}$ verwenden wir die Darstellung des Hilbert-Operators H aus Satz 2.18. Dazu betrachten wir für $J \in \mathbb{N}$ mit $J > j$ das gleichmäßige Gitter $x_l := \frac{l}{2^J}$, $l = -2^{J-1}, \dots, 2^{J-1} - 1$, auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Um die Formel (2.32) anwenden zu können, skalieren wir die Funktionen $\psi_{j,0}$ und $\varphi_{j,0}$ mit dem Faktor $\frac{1}{2^\pi}$ und gelangen so zu dem gleichmäßigen Gitter $y_l := 2\pi x_l$, $l = -2^{J-1}, \dots, 2^{J-1} - 1$, auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, was einem gleichmäßigen Gitter auf \mathbb{T} entspricht. Die Funktionen ${}_m\varphi_{j,0}$ und ${}_{m,\tilde{m}}\psi_{j,0}$, m ist der Grad des Splines und \tilde{m} gibt die Anzahl der verschwindenden Momente an, genügen der Skalierungsgleichung (2.15). Weiterhin ist der Hilbert-Operator $H_{\mathbb{R}}$ dilatationsinvariant. Aus diesen Gründen genügt es, die Werte von $H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi$ auf dem Gitter $2^{j+1-J}l$, $l \in \mathbb{Z}$, zu berechnen. Aus der Symmetrie Eigenschaft ${}_m\varphi(x) = {}_m\varphi(-x)$ folgt

$$H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi(0) = 0$$

und

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi(-y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_m\varphi(x)}{x+y} dx = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{{}_m\varphi(-x)}{-x+y} dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_m\varphi(x)}{x-y} dx = -H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi(y). \end{aligned}$$

Folglich ist es ausreichend, $H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi$ an den Stellen $2^{j+1-J}l$, $l \in \mathbb{N}$, auszuwerten. Wir unterteilen die Punkte in 3 Abschnitte. Der Erste $I_1 := \{2^{j+1-J}l : l = 1, \dots, 2(m+1)2^{J-j}\}$ enthält die Punkte, die sich in der Nähe des Trägers von ${}_m\varphi$ befinden. Zum dritten Bereich $I_3 := \{2^{j+1-J}l : l = 4(m+1)2^{J-j} + 1, \dots\}$ gehören die entfernten Punkte. Der letzte Bereich $I_2 := \{2^{j+1-J}l : l = 2(m+1)2^{J-j} + 1, \dots, 4(m+1)2^{J-j}\}$ umfasst die restlichen Punkte.

Wir beginnen mit I_2 . Da die Funktion ${}_m\varphi$ die Bedingungen (C1) und (C2) erfüllt, besitzt die Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}}$ von ${}_m\varphi$ nach Kapitel 2.5 die Gestalt

$$H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi(y) = \sum_{k=-\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}} \frac{c_k}{\pi m!} (y-k)^m \ln|y-k|. \quad (3.4)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus der stückweise konstanten Funktion ${}_m\varphi^{(m)}$ und sind für $m = 1$ und $m = 3$ in Tabelle 3.2 aufgelistet. Die Punkte $k = 1, \dots, \frac{m+1}{2}$ liegen nicht in I_2 und somit können wir $H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi$ auf I_2 explizit berechnen.

	c_{-2}	c_{-1}	c_0	c_1	c_2
$m = 1$	0	-1	2	-1	0
$m = 3$	-1	4	-6	4	-1

Tabelle 3.2: Koeffizienten c_k für (3.4)

Bemerkung: Man kann nachweisen, dass die Koeffizienten aus Tabelle 3.2 betragsmäßig mit den Binomialkoeffizienten übereinstimmen.

Für I_1 ist die Darstellung (3.4) genauer zu untersuchen, denn es treten für $k = 1, \dots, \frac{m+1}{2}$ Summanden der Form “ $0 \cdot \infty$ ” auf. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad (3.5)$$

können wir die Funktionswerte von $H_{\mathbb{R}} m\varphi$ an den Stellen $k = 1, \dots, \frac{m+1}{2}$ dennoch berechnen. Für die restlichen Punkte aus I_1 haben wir teilweise einen Summanden, welcher das Produkt aus einer kleiner Zahl mit einer großen Zahl ist, was bei der Auswertung Probleme hervorrufen kann. Um dies zu vermeiden, nutzen wir die Skalierungsgleichung (2.15) für $m\varphi$ und wenden die Hilbert-Transformation $H_{\mathbb{R}}$ an. Nach Satz 2.9 erhalten wir

$$H_{\mathbb{R}} m\varphi(y) = \sum_k h_k \sqrt{2} H_{\mathbb{R}} m\varphi(2y - k). \quad (3.6)$$

Sind die Funktionswerte von $H_{\mathbb{R}} m\varphi$ auf \mathbb{Z} bekannt, so lassen sich mittels (3.6) die Werte auf $2^{-1}\mathbb{Z}$ durch

$$H_{\mathbb{R}} m\varphi(2^{-1}l) = \sum_k h_k \sqrt{2} H_{\mathbb{R}} m\varphi(l - k), \quad l \in \mathbb{Z},$$

berechnen, was einer diskreten Faltung entspricht. Dies läßt sich schrittweise fortführen und wir gelangen somit zu den Funktionswerten von $H_{\mathbb{R}} m\varphi$ auf $2^{-j}\mathbb{Z}$. Nachdem wir die ganzzahligen Werte aus I_1 mit Hilfe von (3.4) bestimmt haben, können wir auf diese Art und Weise die Werte von $H_{\mathbb{R}} m\varphi$ auf I_1 berechnen. Dabei müssen wir die Symmetrie von $H_{\mathbb{R}} m\varphi$ beachten und gegebenenfalls auf bereits berechnete Werte aus I_2 zurückgreifen.

Da die Menge I_3 die Punkte enthält, die entfernt von dem Träger von $m\varphi$ liegen, nutzen wir die Darstellung (3.2) von $H_{\mathbb{R}} m\varphi$. Zum Abschneiden der Reihe (3.2) benutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.1 Für $y \in I_3$ und $n \in \mathbb{N}$ läßt sich der Reihenrest von (3.2) abschätzen durch

$$\left| \sum_{l=n}^{\infty} \frac{a_l}{y^{2l}} \right| \leq C(m) 64^{-n}.$$

Beweis : Mittels (3.3) gelangen wir für $y \in I_3$ zu

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{l=n}^{\infty} \frac{a_l}{y^{2l}} \right| &\leq \sum_{l=n}^{\infty} \left| \frac{a_l}{y^{2l}} \right| \leq \sum_{l=n}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{4l+1}} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{2l+\frac{1}{2}} (4(m+1)2^{J-j})^{-2l} \\
 &\leq 2 \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=n}^{\infty} (2^{J+3-j})^{-2l} \\
 &= 2 \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (2^{J+3-j})^{-2n} \frac{1}{1-4^{j-J-3}} \\
 &\leq 2 \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (4^3)^{-n} \frac{1}{1-4^{-3}} = \underbrace{2 \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{64}{64-1}}_{C(m) :=} 64^{-n}. \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

#

Nach Lemma 3.1 benötigen wir höchstens die ersten 9 Momente a_l zur Berechnung von $H_{\mathbb{R} m} \varphi$, um eine Genauigkeit von 10^{-16} zu erreichen. Bislang ist aber die Menge I_3 unbeschränkt. Das liegt daran, dass wir bisher die gesamte Reihe (2.32) betrachtet haben. Indem wir die Reihe (2.32) abschneiden, erreichen wir, dass die Menge I_3 beschränkt wird, da nicht die kompletten Werte von $H_{\mathbb{R} m} \varphi$ auf $2^{j+1-J}\mathbb{Z}$ benötigt werden. Um den Fehler beim Abschneiden zu kontrollieren, nutzen wir die Fernentwicklung von $H_{\mathbb{R}}$ aus Satz 2.13. Das Ergebnis lautet

Lemma 3.2 *Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $_{m,\tilde{m}}\psi$ das in Kapitel 2.3 definierte Wavelet. Dabei ist $m \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ der Spline-Grad und $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ die Anzahl der verschwindenden Momente. Weiterhin sei $\sigma = 2\pi \left(\frac{m+\tilde{m}}{2} + 1 \right)$ und $j \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $\frac{\sigma}{2^j} < \pi$ ist. Dann gilt für $|y| \leq \pi$*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} H_k \psi_{j,0}(y) \right| \leq C(j, \tilde{m}) \left(2n - 1 - \frac{\sigma}{2^j \pi} \right)^{-\tilde{m}-1}.$$

Beweis : Im Kapitel 3.1 haben wir gesehen, dass die Momente $M_0(_{m,\tilde{m}}\psi), \dots, M_{\tilde{m}}(_{m,\tilde{m}}\psi)$ von $_{m,\tilde{m}}\psi$ verschwinden. Mit der im Beweis von Satz 2.13 gezeigten Abschätzung für $R_{\tilde{m}+1}$ bekommen wir für $|y| > \frac{\sigma}{2^j}$

$$|H_{\mathbb{R} m, \tilde{m}} \psi_{j,0}(y)| \leq \frac{\sqrt{2} \|_{m,\tilde{m}}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\pi \sqrt{2\tilde{m}+3}} 2^{\frac{j}{2}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma}{2^j |y| - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2}. \tag{3.8}$$

Die Bedingung $\frac{\sigma}{2^j} < \pi$ garantiert, dass der Träger von $_{m,\tilde{m}}\psi_{j,0}$ komplett im Intervall $[-\pi, \pi]$ liegt. Für den Fehler beim Abschneiden der Reihe (2.32) erhalten wir nun mit $|y| \leq \pi$ und

$$\begin{aligned}
 C &:= \frac{\sqrt{2} \|m, \tilde{m} \psi\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\pi \sqrt{2\tilde{m}+3}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \\
 \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} H_k \psi_{j,0}(y) \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|H_{\mathbb{R}} \psi_{j,0}(y+2k\pi)| + |H_{\mathbb{R}} \psi_{j,0}(y-2k\pi)|) \\
 &\leq 2^{\frac{j}{2}} C \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\left(\frac{\sigma}{2^j |y+2k\pi| - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} + \left(\frac{\sigma}{2^j |y-2k\pi| - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} \right] \\
 &\leq 22^{\frac{j}{2}} C \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2^j (2k\pi - |y|) - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} \\
 &\leq 22^{\frac{j}{2}} C \left(\frac{\sigma}{2^j \pi} \right)^{\tilde{m}+2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[(2k-1) - \frac{\sigma}{2^j \pi} \right]^{-\tilde{m}-2} \\
 &\leq 22^{\frac{j}{2}} C \left(\frac{\sigma}{2^j \pi} \right)^{\tilde{m}+2} \int_n^{\infty} \left(2x-1 - \frac{\sigma}{2^j \pi} \right)^{-\tilde{m}-2} dx \\
 &= \underbrace{C 2^{\frac{j}{2}} \left(\frac{\sigma}{2^j \pi} \right)^{\tilde{m}+2} \frac{1}{\tilde{m}+1}}_{C(j, \tilde{m})} \left(2n-1 - \frac{\sigma}{2^j \pi} \right)^{-\tilde{m}-1}. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

#

Mit Hilfe von Lemma 3.2 lässt sich die Anzahl der Summanden ermitteln, um eine vorgegebene Genauigkeit ε zu erreichen. Damit können wir dann die Menge I_3 einschränken. Im Falle von $H\varphi_{j,0}$ können wir die Abschätzung (3.9) nicht verwenden, da wir formal $\tilde{m} = -1$ setzen müssen und für diesen Wert konvergiert das Integral in (3.9) nicht. Aus diesem Grund verwenden wir nicht die Reihe (2.32) für $H\varphi_{j,0}$ sondern die Darstellung von H aus Satz 2.19. Aus der Symmetrie-Eigenschaft ${}_m\varphi(x) = {}_m\varphi(-x)$ folgt, dass die Momente $M_{2k+1}({}_m\varphi)$ von ${}_m\varphi$ für $k \in \mathbb{N}_0$ verschwinden, siehe auch (3.2). Somit untersuchen wir die Darstellung

$$H\varphi_{j,0}(e^{iy}) = H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi_{j,0}(y) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} M_{2k}({}_m\varphi_{j,0}) \zeta(2k+1, y). \tag{3.10}$$

von $H\varphi_{j,0}$. Die Werte $H_{\mathbb{R}} {}_m\varphi(y_l)$ berechnen wir wie oben beschrieben. Für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{2k}({}_m\varphi_{j,0}) \zeta(2k+1, y)$$

benutzen wir die explizite Darstellung der Funktionen $\zeta(2k+1, y)$ und den Momenten $M_{2k}({}_m\varphi_{j,0}) = 2^{-(2k+\frac{1}{2})j} a_k$ mit den Momenten a_k aus Tabelle 3.1. Der Fehler beim Abschneiden ergibt sich aus

Lemma 3.3 Für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{Z}$ ist der Reihenrest von (3.10) für den B-Spline ${}_m\varphi_{j,0}$ vom Grad $m \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ gegeben durch

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} M_{2k}({}_m\varphi_{j,0}) \zeta(2k+1, y) \right| \leq C(j, m) \left(\frac{m+1}{2^{j+1}\pi} \right)^{2n}.$$

Beweis : Nach Satz 2.20 und (3.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=n}^{\infty} M_{2k}({}_m\varphi_{j,0}) \zeta(2k+1, y) \right| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(2k+\frac{1}{2})j} |a_k| |\zeta(2k+1, y)| \\
 &\leq 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-2kj} \frac{2}{\sqrt{4k+1}} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{2k+\frac{1}{2}} \pi^{-2k-1} \\
 &\leq 22^{-\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{m+1}{2^{j+1}\pi} \right)^{2k} \\
 &= \underbrace{\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{m+1}{2^{j+1}}} \frac{1}{1 - \left(\frac{m+1}{2^{j+1}\pi} \right)^2}}_{C(j,m) :=} \left(\frac{m+1}{2^{j+1}\pi} \right)^{2n}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

#

Mit Hilfe von Lemma 3.3 läßt sich die Anzahl der benötigten Summanden bestimmen, um eine vorgegebene Genauigkeit ε zu realisieren. Die numerische Auswertung der Funktionen $\zeta(2k+1, y)$ um den Nullpunkt ist schwierig, da man die Differenz großer Zahlen bilden muss. Aus diesem Grund wollen wir die Berechnung von $\zeta(2l+1, y)$ um den Nullpunkt vermeiden. Dazu wollen wir die Skalierungsgleichung (2.15) von ${}_m\varphi$ benutzen. Da der Hilbert-Operator H aber nicht dilatationsinvariant ist, können wir ihn nicht direkt auf (2.15) anwenden. Ein Ausweg stellt das nächste Lemma dar.

Lemma 3.4 Sei $m \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ der Grad des B-Splines ${}_m\varphi$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{(m+1)}{2^{j+1}} < \frac{1}{2}$. Für die Hilbert-Transformation erhalten wir die folgende modifizierte Skalierungsgleichung

$$H\varphi_{j,0}(y) = \sum_k h_k \left(H\varphi_{j,0} \left(2y - \frac{k}{2^j} \right) - H\varphi_{j+1,0} \left(y - \frac{k}{2^{j+1}} - \pi \right) \right) \tag{3.12}$$

mit den Filter-Koeffizienten h_k aus Tabelle 2.1.

Beweis : Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 2\pi H\varphi_{j+1,0}(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{s-t}{2} \varphi_{j,0}(2s) ds = \int_{-2\pi}^{2\pi} \cot \frac{\frac{s}{2}-t}{2} \varphi_{j,0}(s) \frac{ds}{2} \\
 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \cot \frac{\frac{s-2t}{2}}{2} \varphi_{j,0}(s) \frac{ds}{2}.
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Identität

$$\cot \frac{x}{2} = 2 \cot x + \tan \frac{x}{2}$$

bekommen wir weiter

$$\begin{aligned}
 2\pi H\varphi_{j+1,0}(t) &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \cot \frac{s-2t}{2} \varphi_{j,0}(s) ds + \int_{-2\pi}^{2\pi} \tan \frac{s-2t}{4} \varphi_{j,0}(s) \frac{ds}{2} \\
 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \cot \frac{s-2t}{2} \varphi_{j,0}(s) ds + \int_{-\pi}^{\pi} \tan \frac{s-t}{2} \varphi_{j,0}(2s) ds \\
 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \cot \frac{s-2t}{2} \varphi_{j,0}(s) ds - \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{s-(t-\pi)}{2} \varphi_{j,0}(2s) ds.
 \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$H\varphi_{j+1,0}(t) = H\varphi_{j,0}(2t) - H\varphi_{j+1,0}(t-\pi). \quad (3.13)$$

Demnach können wir den Hilbert-Operator H auf (2.15) anwenden und gelangen zu

$$H\varphi_{j,0}(y) = \sum_k h_k \left(H\varphi_{j,0} \left(2y - \frac{k}{2^j} \right) - H\varphi_{j+1,0} \left(y - \frac{k}{2^{j+1}} - \pi \right) \right).$$

#

Liegt der Punkt y in der Nähe des Nullpunktes, so befindet sich der Punkt $y - \frac{k}{2^{j+1}} - \pi$ in der Umgebung des Punktes $-\pi$ und $H\varphi_{j+1,0}(y - \frac{k}{2^{j+1}} - \pi)$ kann durch (3.10) berechnet werden. Mit Hilfe von (3.12) können wir nun die Werte von $H\varphi_{j,0}(y)$ in der Nähe der Null bestimmen, ohne dass wir die Funktionen $\zeta(2k+1, y)$ an diesen Stellen explizit auswerten müssen.

Zusammenfassend haben wir: Gegeben seien die Parameter $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, so dass $m + \tilde{m} \in 2\mathbb{N}_0$, das Level j , die Feinheit $\frac{1}{2^j}$ des Gitters und die Genauigkeit ε der Rechnung. Zur Berechnung von $H\psi_{j,0}$ verfährt man wie im Algorithmus 1 beschrieben.

Für die Berechnung von $H\varphi_{j,0}$ geht man wie im Algorithmus 2 vor.

Die Abbildung 3.1 zeigt einige Beispiele der Hilbert-Transformation H für einige Wavelets und den Skalierungsfunktionen ${}_1\varphi$ und ${}_3\varphi$.

Algorithmus 1 : Berechnung von $H\psi_{j,0}$

Eingabe: $j \dots$ Level

$J \dots$ feines Level

$m \dots$ Regularität des B-Splines

$\tilde{m} \dots$ Anzahl der verschwindenden Momente

$\varepsilon \dots$ Genauigkeit der Rechnung

Schritt 1: Berechne die Anzahl n der Summanden für (2.32), so dass der Fehler (3.9) kleiner als ε ist, und ermittle die Mengen I_1 , I_2 und I_3 .

Schritt 2: Bestimme die Werte $H_{\mathbb{R} m} \varphi$

- auf der Menge I_2 durch die Darstellung (3.4) von $H_{\mathbb{R} m} \varphi$,
- auf der Menge $I_1 \cap \mathbb{N}$ durch (3.4) unter Beachtung von (3.5) und für $I_1 \setminus \mathbb{N}$ über (3.6) unter Verwendung der Symmetrie $H_{\mathbb{R} m} \varphi(-y) = -H_{\mathbb{R} m} \varphi(y)$ und den berechneten Werten auf der Menge I_2 ,
- auf der Menge I_3 durch die Fernentwicklung (3.2) von $H_{\mathbb{R} m} \varphi$, wobei die Anzahl der Summanden in der Reihendarstellung durch (3.7) bestimmt wird.

Schritt 3: Berechne $H_{\mathbb{R} m, \tilde{m}} \psi_{j,0}$ auf $[-\pi - 2\pi n, \pi + 2\pi n]$ mittels

$$H_{\mathbb{R} m, \tilde{m}} \psi_{j,0}(y) = \sum_l g_l H_{\mathbb{R} m} \varphi(2^{j+1}y - l).$$

Schritt 4: Bilde die Summe (2.32).

Ausgabe: Funktionswerte $H\psi_{j,0}$ in den Punkten $\frac{l}{2^J}$, $l = -2^{J-1}, \dots, 2^{J-1} - 1$

Algorithmus 2 : Berechnung von $H\varphi_{j,0}$

Eingabe: $j \dots$ Level

$J \dots$ feines Level

$m \dots$ Regularität des B-Splines

$\varepsilon \dots$ Genauigkeit der Rechnung

Schritt 1: Berechne die Anzahl n der Summanden für (3.10) nach (3.11).

Schritt 2: Ermittle die Werte von $H_{\mathbb{R}} m\varphi_{j,0}$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ wie im Algorithmus 1, Schritt 2 beschrieben.

Schritt 3: Bilde die abgeschnittene Summe (3.10), wobei die Punkte in der Nähe des Nullpunktes nicht berücksichtigt werden.

Schritt 4: Mit Hilfe von (3.12) berechne die Werte von $H\varphi_{j,0}$ für die Punkte in der Nähe der 0. Dabei verwende die benötigten Daten von $H\varphi_{j+1,0}$ mittels (3.10) aus.

Ausgabe: Funktionswerte $H\varphi_{j,0}$ in den Punkten $\frac{l}{2^j}$, $l = -2^{j-1}, \dots, 2^{j-1} - 1$

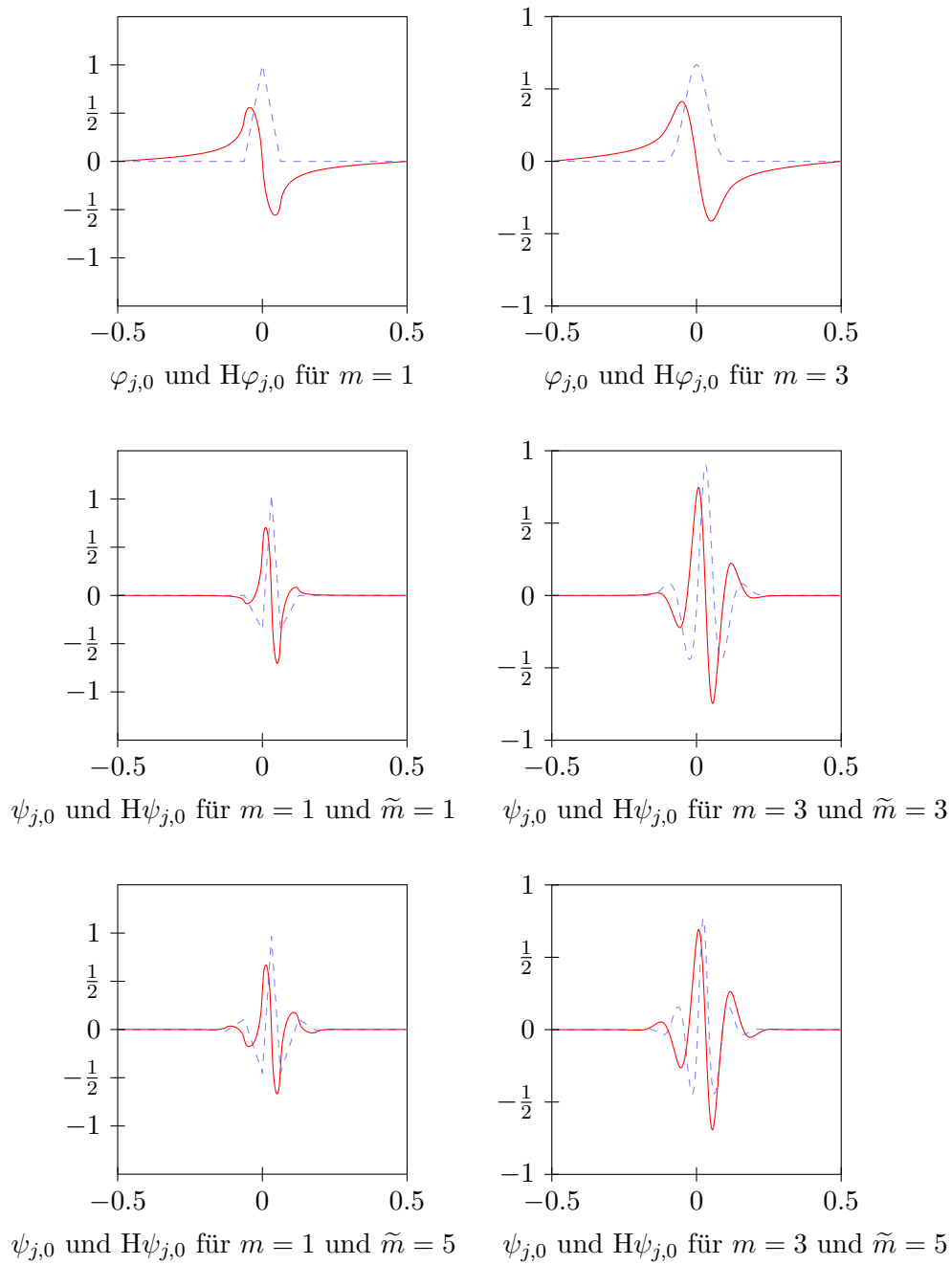


Abbildung 3.1: Hilbert-Transformation $H\psi_{j,0}$ und $H\varphi_{j,0}$ für das Level $j = 4$ und Diskretisierung $J = 8$

3.3 Berechnung des Hilbert-Operators auf gleichmäßigen Gittern

Mit Hilfe der Hilbert-Transformation H der Wavelets $\psi_{j,0}$ und der Skalierungsfunktion $\varphi_{j,0}$ wollen wir eine Methode entwickeln, um den Hilbert-Operator H für eine Funktion $u \in W_2^s[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ auf einem gleichmäßigen Gitter zu bestimmen. Für $J \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Gitter $\mathcal{G} = \{\frac{l}{2^J} : l = -2^{J-1}, \dots, 2^{J-1} - 1\}$ auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Zuerst interpolieren wir die Funktion u auf dem Gitter \mathcal{G} mit den periodisierten B-Splines $\varphi_{J,k}$, $k = 0, \dots, 2^J - 1$. Satz 2.7 gibt den Fehler bei der Interpolation an. Als Ergebnis bekommen wir eine Funktion

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} a_{J,k} \varphi_{J,k}(x)$$

mit

$$u(x) = \tilde{u}(x), \quad x \in \mathcal{G}.$$

Die Koeffizientenmatrix $A := (\varphi_{J,k}(\frac{l}{2^J}))_{k=0, l=-2^{J-1}}^{2^J-1, 2^{J-1}-1} \in \mathbb{R}^{2^J \times 2^J}$ zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{J,k}$, $k = 0, \dots, 2^J - 1$, ist zirkulant und wegen des Trägers $[-\frac{m+1}{2^{J+1}}, \frac{m+1}{2^{J+1}}]$ von $\varphi_{J,0}$ dünn besetzt. Nach Kapitel 2.4 lassen sich die Koeffizienten $a_{J,k}$ schnell und effizient zum Beispiel mit Hilfe der FFT und der inversen FFT berechnen. Durch wiederholte Anwendung der Wavelet-Zerlegung (2.11) gelangen wir zu der Darstellung

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (3.14)$$

von \tilde{u} mit $j_0 < J$. Wir wenden den Hilbert-Operator H an und, da H linear und beschränkt ist, bekommen wir

$$H\tilde{u}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} H\varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} H\psi_{j,k}(x). \quad (3.15)$$

Nach Kapitel 3.2 können wir $H\varphi_{j_0,0}$ und $H\psi_{j,0}$, $j = j_0, \dots, J-1$, auf dem Gitter \mathcal{G} berechnen. Da der Hilbert-Operator H nach Satz 2.16 translationsinvariant ist, kennen wir auch $H\varphi_{j_0,k}$, $k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1$, und $H\psi_{j,k}$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$. Wir fassen alle Werte zu der Matrix

$$\mathcal{H} := \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \dots & | \\ \hline H\varphi_{j_0,k}(\frac{l}{2^J}) & H\psi_{j_0,k}(\frac{l}{2^J}) & \dots & H\psi_{J-1,k}(\frac{l}{2^J}) \\ \hline | & | & \dots & | \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2^J \times 2^J} \quad (3.16)$$

zusammen. Dabei ist $l = -2^{J-1}, \dots, 2^{J-1} - 1$ der Zeilenindex und $k = 0, \dots, 2^j - 1$ der (entsprechende) Spaltenindex. Fassen wir die Wavelet-Koeffizienten zu einem Vektor

$$\mathbf{w} := [-a_{j_0,k} - | -b_{j_0,k} - | \dots - b_{J-1,k} -]^\top \quad (3.17)$$

zusammen, so ergeben sich die Werte der Hilbert-Transformation $H\tilde{u}$ auf \mathcal{G} aus der Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\mathcal{H}\mathbf{w}.$$

Die Matrix \mathcal{H} ist vollbesetzt und wir haben somit eine Komplexität von $\mathcal{O}(2^{2J})$ zur Auswertung dieser Multiplikation, was sehr aufwendig ist, wenn J sehr groß ist. Um dies zu optimieren, untersuchen wir das Verhalten von $H\psi_{j,0}$. Anhand von Abbildung 3.1 erkennen wir, dass die Hilbert-Transformation H der Wavelets $\psi_{j,0}$ gut lokalisiert ist. Genauer haben wir

Satz 3.5 *Gegeben sei $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}_0$, so dass $m + \tilde{m}$ gerade ist, sowie das zugehörige Wavelet $_{m,\tilde{m}}\psi$ (skaliert mit dem Faktor $\frac{1}{2^\pi}$) und die Periodisierung $\psi_{j,0}$ von $_{m,\tilde{m}}\psi_{j,0}$. Dann gilt für $\frac{\sigma}{2^j} < |y| \leq \pi$*

$$\left| D_y^k H\psi_{j,0}(y) \right| \leq C 2^{\frac{j}{2}} 2^{jk} \left(\frac{\sigma}{2^j |y| - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2+k}, \quad k = 0, \dots, m,$$

mit $\sigma = 2\pi \left(\frac{m+\tilde{m}}{2} + 1 \right)$.

Beweis : 1. Wir beginnen mit dem Fall $k = 0$. Benutzen wir die Darstellung (2.32) und die Abschätzung (3.8), so gelangen wir für $\frac{\sigma}{2^j} < y \leq \pi$ zu

$$\begin{aligned} |H\psi_{j,0}(y)| &\leq |H_{\mathbb{R}} \psi_{j,0}(y)| + \sum_{k=1}^{\infty} |H_k \psi_{j,0}(y)| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} \underbrace{\frac{\sqrt{2} \|_{m,\tilde{m}}\psi\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\pi \sqrt{2\tilde{m}+3}}}_{:= \frac{C}{4}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma}{2^j |y + 2\pi k| - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} \\ &\leq 2^{\frac{j}{2}} \frac{C}{4} \left\{ \left(\frac{\sigma}{2^j y - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} + \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2^j (y + 2\pi x) - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} dx + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sigma}{2^j (2\pi - y) - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} + \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{\sigma}{2^j (-y - 2\pi x) - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} dx \right\} \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \frac{C}{4} \left\{ \left(\frac{\sigma}{2^j y - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} + \frac{1}{2\pi 2^j (\tilde{m} + 1)} \frac{\sigma^{\tilde{m}+2}}{(2^j y - \sigma)^{\tilde{m}+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sigma}{2^j (2\pi - y) - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} + \frac{1}{2\pi 2^j (\tilde{m} + 1)} \frac{\sigma^{\tilde{m}+2}}{(2^j (2\pi - y) - \sigma)^{\tilde{m}+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen $2\pi - y \geq y > 0$ und $y \leq \pi$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}\psi_{j,0}(y)| &\leq 2^{\frac{j}{2}} \frac{C}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma}{2^j y - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} + \frac{1}{2\pi 2^j (\tilde{m}+1)} \frac{\sigma^{\tilde{m}+2}}{(2^j y - \sigma)^{\tilde{m}+1}} \right\} \\ &\leq C 2^{\frac{j}{2}} \left(\frac{\sigma}{2^j y - \sigma} \right)^{\tilde{m}+2} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung für $k = 0$.

2. Ist $k > 0$, so vertauschen wir nach Satz 2.16 die Differentiation und den Hilbert-Operator \mathcal{H} . Mittels Lemma 2.12 verschwinden die Momente $M_0(D_x^k \psi_{j,0}), \dots, M_{\tilde{m}+k}(D_x^k \psi_{j,0})$ von $D_x^k \psi_{j,0}$. Die Behauptung ergibt sich dann aus einer analogen Abschätzung wie oben. $\#$

Durch die Lokalisierung der Funktionen $\mathcal{H}\psi_{j,0}$ ist es möglich, die Matrix \mathcal{H} zu komprimieren, indem wir $\mathcal{H}\psi_{j,0}$ mit einer Fensterfunktion η multiplizieren. Dabei soll die Funktion η den folgenden Eigenschaften genügen:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= 1 && \text{für } -B \leq x \leq B, \\ \eta(x) &\in (0, 1) && \text{für } B < |x| < \tilde{B}, \\ \eta(x) &= 0 && \text{für } \tilde{B} \leq |x| \end{aligned} \tag{3.18}$$

mit $B, \tilde{B} \in \mathbb{N}$ und $\tilde{B} > B$. Zur Konstruktion solcher Funktionen siehe [51, S. 95]. Wir schreiben

$$\eta_{j,k}(x) = \eta(2^j x - k).$$

Die Periodisierung von $\eta_{j,k}$ mit Periode 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_{j,k}(x+n)$$

bezeichnen wir wieder mit $\eta_{j,k}$. Der Abschneidefehler ergibt sich aus

Lemma 3.6 *Sei $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}_0$ mit $m + \tilde{m} \in 2\mathbb{N}_0$ und $_{m,\tilde{m}}\psi$ das zugehörige Wavelet sowie $\psi_{j,0}$ die Periodisierung von $_{m,\tilde{m}}\psi_{j,0}$. Die Funktion $\eta \in W_2^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq s < m + \frac{1}{2}$, besitze die Eigenschaften (3.18). Dann haben wir für $2\sigma < B < \tilde{B} < 2^{j-1}$*

$$\|(1 - \eta_{j,0}) \mathcal{H}\psi_{j,0}\|_{W_2^s} \leq 2^{js} C \left(\eta, s, B, \tilde{B}, m, \tilde{m} \right) \left(\frac{\sigma}{B - \sigma} \right)^{\tilde{m} + \frac{3}{2}}$$

mit $\sigma = \frac{m+\tilde{m}}{2} + 1$.

Beweis : Wir beginnen mit

$$\|(1 - \eta_{j,0}) \mathcal{H}\psi_{j,0}\|_{L_2}^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |(1 - \eta_{j,0}(x)) \mathcal{H}\psi_{j,0}(x)|^2 dx.$$

Wegen $1 - \eta_{j,0}(x) = 0$ für $x \in [-\frac{B}{2^j}, \frac{B}{2^j}]$ teilen wir die Integration auf die Intervalle $[-\frac{1}{2}, -\frac{\tilde{B}}{2^j}]$, $[-\frac{\tilde{B}}{2^j}, -\frac{B}{2^j}]$, $I_1 := [\frac{B}{2^j}, \frac{\tilde{B}}{2^j}]$ und $I_2 := [\frac{\tilde{B}}{2^j}, \frac{1}{2}]$ auf. Um die Formeln etwas zu vereinfachen, setzen wir

$$\begin{aligned} q &:= \frac{\sigma}{B - \sigma}, \\ \tilde{q} &:= \frac{\sigma}{\tilde{B} - \sigma}, \\ \eta_k &= \int_B^{\tilde{B}} \left| \frac{d^k}{dx^k} [1 - \eta](x) \right|^2 dx, \quad k = 0, \dots, s. \end{aligned}$$

Auf dem Intervall I_1 bekommen wir dann nach Satz 3.5

$$\begin{aligned} \int_{I_1} |(1 - \eta_{j,0}(x)) \mathbf{H}\psi_{j,0}(x)|^2 dx &\leq 2^j C^2 \left(\frac{\sigma}{2^j \frac{B}{2^j} - \sigma} \right)^{2(\tilde{m}+2)} \int_{I_1} |1 - \eta(2^j x)|^2 dx \\ &\leq 2^j C^2 q^{2(\tilde{m}+2)} \int_B^{\tilde{B}} |1 - \eta(x)|^2 \frac{dx}{2^j} \\ &= C^2 q^{2(\tilde{m}+2)} \eta_0. \end{aligned}$$

Auf Grund von $1 - \eta_{j,0}(x) = 1$ für $x \in I_2$ und Satz 3.5 haben wir

$$\begin{aligned} \int_{I_2} |(1 - \eta_{j,0}(x)) \mathbf{H}\psi_{j,0}(x)|^2 dx &\leq 2^j C^2 \int_{I_2} \left(\frac{\sigma}{2^j x - \sigma} \right)^{2(\tilde{m}+2)} dx \\ &= 2^j C^2 \frac{-1}{2\tilde{m}+3} \sigma 2^{-j} \left(\frac{\sigma}{2^j x - \sigma} \right)^{2\tilde{m}+3} \Big|_{I_2} \\ &\leq C^2 \sigma \tilde{q}^{2\tilde{m}+3}. \end{aligned}$$

Für die restlichen beiden Intervalle erhalten wir eine analoge Abschätzung. Somit gelangen wir mit $B < \tilde{B}$ und $q < 1$ zu

$$\|(1 - \eta_{j,0}) \mathbf{H}\psi_{j,0}\|_{L_2} \leq \sqrt{2} C q^{\tilde{m} + \frac{3}{2}} \sqrt{\eta_0 + \sigma}.$$

Als nächstes schätzen wir $\|D_x^s [(1 - \eta_{j,0}) \mathbf{H}\psi_{j,0}]\|_{L_2}$ ab und bekommen mit Leibniz' Formel

$$\begin{aligned} \|D_x^s [(1 - \eta_{j,0}) \mathbf{H}\psi_{j,0}]\|_{L_2} &= \left\| \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} D_x^{s-k} [1 - \eta_{j,0}] D_x^k \mathbf{H}\psi_{j,0} \right\|_{L_2} \\ &\leq \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \|D_x^{s-k} [1 - \eta_{j,0}] D_x^k \mathbf{H}\psi_{j,0}\|_{L_2} \\ &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_x^{s-k} [1 - \eta_{j,0}](x) D_x^k \mathbf{H}\psi_{j,0}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mittels Satz 3.5 erhalten wir auf dem Intervall I_1 wie oben

$$\int_{I_1} \left| D_x^{s-k} [1 - \eta_{j,0}] (x) D_x^k H\psi_{j,0} (x) \right|^2 dx \leq 2^{2js} C^2 q^{2(\tilde{m}+2+k)} \eta_{s-k}.$$

Wegen $\eta_{j,0}(x) = 0$ auf I_2 ist $D_x^{s-k} [1 - \eta_{j,0}] \equiv 0$ für $k = 0, \dots, s-1$. Somit bleibt für I_2 nur der Summand $k = s$ übrig. Nach Satz 3.5 ist wie oben

$$\int_{I_2} |D_x^s H\psi_{j,0} (x)|^2 dx \leq 2^{2js} C^2 \sigma \tilde{q}^{2(\tilde{m}+s)+3}.$$

Die beiden restlichen Intervalle lassen sich analog abschätzen. Summation liefert schließlich auf Grund von $\tilde{q} < q < 1$

$$\begin{aligned} \|D_x^s [(1 - \eta_{j,0}) H\psi_{j,0}]\|_{L_2} &\leq \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \sqrt{2} 2^{js} C q^{\tilde{m}+k+2} \sqrt{\eta_{s-k}} + \sqrt{2} 2^{js} C \sqrt{\sigma} \tilde{q}^{\tilde{m}+s+\frac{3}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} 2^{js} C q^{\tilde{m}+\frac{3}{2}} \left(\sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \sqrt{\eta_{s-k}} + \sqrt{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \|(1 - \eta_{j,0}) H\psi_{j,0}\|_{W_2^s} &\leq \|(1 - \eta_{j,0}) H\psi_{j,0}\|_{L_2} + \|D_x^s [(1 - \eta_{j,0}) H\psi_{j,0}]\|_{L_2} \\ &\leq 2^{js} \tilde{C} \sqrt{2} C \underbrace{\left(\sqrt{\eta_0 + \sigma} + \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \sqrt{\eta_{s-k}} + \sqrt{\sigma} \right)}_{C(\eta, s, B, \tilde{B}, m, \tilde{m}) :=} q^{\tilde{m}+\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

#

Mit Hilfe der Fensterfunktion η approximieren wir den Hilbert-Operator.

Definition 3.7 Für eine Funktion u aus $W_2^s [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit ihrer Wavelet-Darstellung

$$u(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

und einer Fensterfunktion $\eta \in W_2^1 [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit den Eigenschaften (3.18) definieren wir

$$\tilde{H}u(x) := \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} H\varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \eta_{j,k} H\psi_{j,k}(x). \quad (3.19)$$

Für den Fehler erhalten wir

Satz 3.8 Sei $u \in W_2^s [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit $0 \leq r < s < m + \frac{1}{2}$ und $r < s - \frac{1}{2}$. Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.6 gilt

$$\left\| (H - \tilde{H}) u \right\|_{W_2^r} \leq D(\eta, s, B, \tilde{B}, m, \tilde{m}) \left(\frac{\sigma}{B - \sigma} \right)^{\tilde{m}+\frac{3}{2}} \|u\|_{W_2^s}.$$

Beweis : Mit Lemma 3.6, (2.20) und $q := \frac{\sigma}{B-\sigma}$ ist

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(H - \tilde{H} \right) u \right\|_{W_2^r} &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} |b_{j,k}| \left\| (1 - \eta_{j,k}) H\psi_{j,k} \right\|_{W_2^r} \\
 &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} |b_{j,k}| 2^{jr} C \left(\eta, s, B, \tilde{B}, m, \tilde{m} \right) q^{\tilde{m} + \frac{3}{2}} \\
 &\leq C \left(\eta, s, B, \tilde{B}, m, \tilde{m} \right) q^{\tilde{m} + \frac{3}{2}} \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{2js} |b_{j,k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{2j(r-s)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \underbrace{C \left(\eta, s, B, \tilde{B}, m, \tilde{m} \right) c_s^{-1} 2^{j_0(r-s+\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{1}{1 - 2^{2(r-s)+1}}}}_{D(\eta, s, B, \tilde{B}, m, \tilde{m}) :=} q^{\tilde{m} + \frac{3}{2}} \|u\|_{W_2^s}. \quad \#
 \end{aligned}$$

Wir kehren zu der Matrix \mathcal{H} zurück und wählen uns den Parameter $B \in \mathbb{N}$ so, dass der Fehler in Satz 3.8 in der Größenordnung des Interpolationsfehlers liegt. Anschließend konstruieren wir die Fensterfunktion η mit Hilfe des Parameters B und bilden

$$\tilde{H}\psi_{j,0}(x) = \eta_{j,0}(x) H\psi_{j,0}(x), \quad j = j_0, \dots, J-1.$$

Im Anschluß fassen wir die Werte auf dem Gitter \mathcal{G} zu der komprimierten Form der Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ zusammen:

$$\tilde{\mathcal{H}} := \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ \hline H\varphi_{j_0,k} \left(\frac{l}{2^J} \right) & \tilde{H}\psi_{j_0,k} \left(\frac{l}{2^J} \right) & \dots & \tilde{H}\psi_{J-1,k} \left(\frac{l}{2^J} \right) \\ \hline | & | & & | \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2^J \times 2^J}. \quad (3.20)$$

In Abbildung 3.2 ist die Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ für $j_0 = 8$ und $J = 12$ dargestellt, wobei die von Null verschiedenen Werte farbig sind. Der rote Anteil gibt gerade die Werte von $H\varphi_{j_0,k}$ an, der voll besetzt ist. Die Anzahl der Einträge, die von Null verschieden sind, beträgt

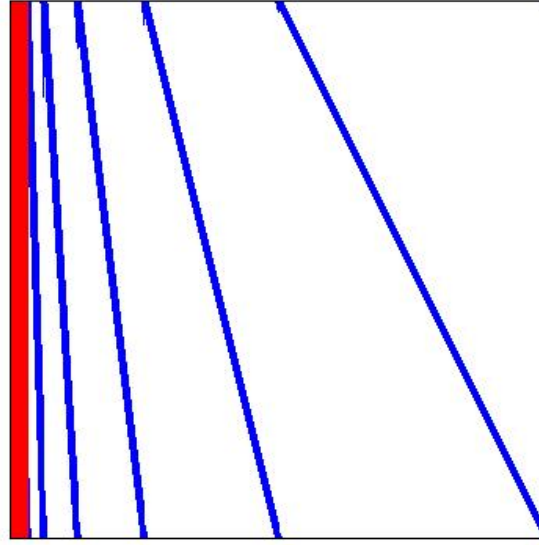
$$2^J \left(2^{j_0} + (2\tilde{B} + 1) (J - j_0) \right).$$

Somit besitzt die Auswertung der Matrix-Vektor-Multiplikation $\tilde{\mathcal{H}}\mathbf{w}$ eine Komplexität von

$$\mathcal{O}(J2^J) \quad (3.21)$$

und wir erhalten dadurch eine schnelle Möglichkeit zur Berechnung der Funktionswerte von Hu auf dem Gitter \mathcal{G} .

Bemerkung: Zur Berechnung der Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ benötigen wir nur die Werte von $H\psi_{j,0}$ auf dem Intervall $\left[-\frac{\tilde{B}}{2^j}, \frac{\tilde{B}}{2^j} \right]$. Dies kann man bei der Berechnung von $H\psi_{j,0}$ durch den Algorithmus 1 mit berücksichtigen.


 Abbildung 3.2: Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$

Abschließend wollen wir noch eine andere Möglichkeit zur Berechnung von Hu für $u \in W_2^s$ diskutieren. Wegen $Hu \in W_2^s$ besitzt die Hilbert-Transformation von u die Darstellung

$$Hu(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \hat{a}_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{b}_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (3.22)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j_0,l} &= \langle Hu, \tilde{\varphi}_{j_0,l} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \langle H\varphi_{j_0,k}, \tilde{\varphi}_{j_0,l} \rangle + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \langle H\psi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j_0,l} \rangle, \\ &\quad l = 0, \dots, 2^{j_0} - 1, \\ \hat{b}_{\nu,l} &= \langle Hu, \tilde{\psi}_{\nu,l} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \langle H\varphi_{j_0,k}, \tilde{\psi}_{\nu,l} \rangle + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \langle H\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\nu,l} \rangle, \\ &\quad l = 0, \dots, 2^{j_0} - 1, \quad j = j_0, \dots \end{aligned}$$

Wir fassen die Skalarprodukte $\langle H\varphi_{j_0,k}, \tilde{\varphi}_{j_0,l} \rangle$, $\langle H\psi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j_0,l} \rangle$, $\langle H\varphi_{j_0,k}, \tilde{\psi}_{\nu,l} \rangle$ und $\langle H\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\nu,l} \rangle$ zu einer Matrix zusammen. Durch das Verhalten von $H\psi_{j,k}$ läßt sich diese Matrix wieder komprimieren. Die Struktur der Matrix, die dabei entsteht, ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Für

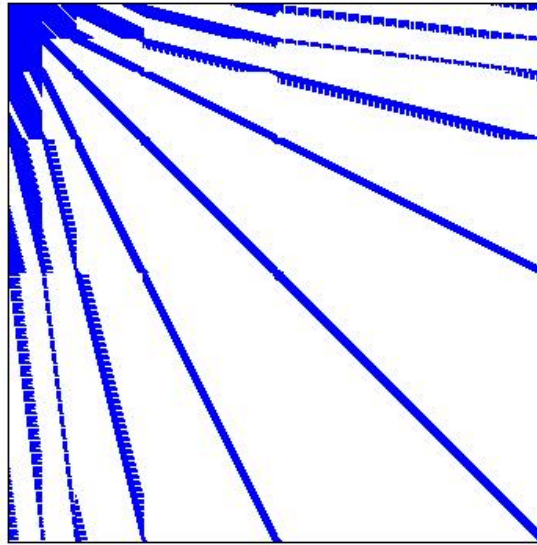


Abbildung 3.3: Matrix für Entwicklung von H in Wavelets

nähere Informationen verweisen wir auf die Arbeiten [2–4]. Bei dieser Vorgehensweise erhalten wir die Wavelet-Darstellung von Hu . Um die Funktionswerte von Hu zu bestimmen, müssen wir (3.22) auswerten. Aufgrund des kompakten Trägers von $\varphi_{j_0,0}$ und $\psi_{j,0}$, $j = j_0, \dots$, ist dies effektiv und schnell möglich. Das Problem besteht aber in der Berechnung der Skalarprodukte $\langle H\varphi_{j_0,k}, \tilde{\varphi}_{j_0,l} \rangle$, $\langle H\psi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j_0,l} \rangle$, $\langle H\varphi_{j_0,k}, \tilde{\psi}_{\nu,l} \rangle$ und $\langle H\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{\nu,l} \rangle$, da die dualen Funktionen $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ nicht explizit gegeben sind. Außerdem sind Superpositionsoperatoren, wie zum Beispiel $\exp(Hu)$, für uns von Interesse. Deswegen ist es vorteilhafter, die Funktionswerte von Hu zu bestimmen und nicht die Wavelet-Darstellung von Hu .

3.4 Berechnung des Hilbert-Operators auf ungleichmäßigen Gittern

Bevor wir uns der Auswertung des Hilbert-Operators H auf einem ungleichmäßigen Gitter widmen, beschreiben wir zunächst die Struktur und den Aufbau eines solchen ungleichmäßigen Gitters, wie wir sie betrachten wollen.

Wir wählen zwei Parameter $j_0, J \in \mathbb{N}$ mit $j_0 < J$. Dabei entspricht der Parameter j_0 dem groben Level und J dem feinen Level. Das feine Gitter

$$\mathcal{F}_J := \left\{ \frac{l}{2^J} : l = -2^{J-1}, \dots, 2^{J-1} - 1 \right\}$$

enthält alle möglichen Punkte, die in Frage kommen. Wir ordnen dem Gitter \mathcal{F}_J die Indexmenge

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} := \{l : l = -2^{J-1}, \dots, 2^{J-1} - 1\}$$

zu. Jedem Punkt x aus \mathcal{F}_J kann man eindeutig einen Index l aus $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ zuweisen und umgekehrt.

Anhand des Index l kann man auch das Level bestimmen, zu welchem der Punkt x gehört.

Wir sagen der Gitterpunkt $x = a2^{-j}$ mit $a, j \in \mathbb{Z}$ und $j_0 \leq j \leq J$ gehört zum Level j und jeder Punkt, der zum Level j gehört, läßt sich automatisch auch zu allen Levels $j+1, \dots, J$ zuordnen. Ist $x = a2^{-j}$ mit $a \in 2\mathbb{Z} + 1$, so gehört der Punkt x zum Level j aber nicht zum Level $j-1$. Wir nennen die Darstellung $x = a2^{-j}$ normalisiert, wenn $a \in 2\mathbb{Z} + 1$ und $j > j_0$ oder $a \in \mathbb{Z}$ und $j = j_0$ ist. Analog definieren wir den normalisierten Index $l = a2^{J-j} \in \mathbb{Z}$.

Haben wir einen Gitterpunkt $x \in \mathcal{F}_J$ mit dem entsprechenden Index $l = a2^{J-j}$ mit $j > j_0$ gegeben, so ordnen wir diesem Index die beiden Indizes

$$l_- := \frac{a-1}{2}2^{J-j+1} \quad \text{und} \quad l_+ := \frac{a+1}{2}2^{J-j+1}$$

beziehungsweise die entsprechenden Punkte

$$x_- := \frac{a-1}{2}2^{-j+1} \quad \text{und} \quad x_+ := \frac{a+1}{2}2^{-j+1} \tag{3.23}$$

zu. Die Punkte x_- und x_+ gehören zum Level $j-1$ und sind gerade so gewählt, dass x der Mittelpunkt von x_- und x_+ ist. Damit definieren wir die Gitter, auf dem wir den Hilbert-Operator H auswerten wollen.

Definition 3.9 *Ein Gitter $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_J$ heißt zulässig, wenn gilt*

1. für das grobe Gitter $\mathcal{G}_{j_0} := \left\{ \frac{l}{2^{j_0}} : l = -2^{j_0-1}, \dots, 2^{j_0-1} - 1 \right\}$ gilt $\mathcal{G}_{j_0} \subseteq \mathcal{G}$,

2. ist $x \in \mathcal{G}$, so folgt, dass $x_- \in \mathcal{G}$ und $x_+ \in \mathcal{G}$.

Die zugehörige zulässige Indexmenge bezeichnen wir mit $\mathcal{I}(\mathcal{G})$. Falls das Gitter bekannt ist, so schreiben wir auch kurz \mathcal{I} .

Abbildung 3.4 zeigt sowohl den Ausschnitt eines zulässigen Gitters als auch eines nicht zulässigen Gitters, da die rot dargestellten Gitterpunkte (●) nicht vorhanden sind.

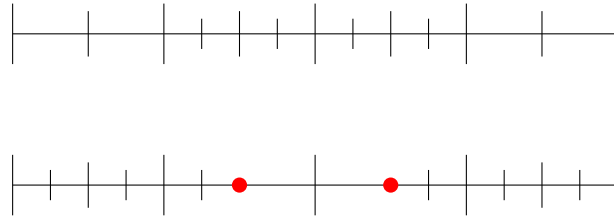


Abbildung 3.4: zulässiges (oben) und nicht zulässiges (unten) Gitter

Ein gegebenes zulässiges Gitter \mathcal{G} unterteilen wir auf die einzelnen Levels. Zu der Menge \mathcal{G}_j mit $j_0 < j \leq J$ fassen wir alle Punkte aus \mathcal{G} zusammen, die zum Level j gehören aber nicht zum Level $j - 1$. Die Kardinalität der Menge \mathcal{G}_j bezeichnen wir mit N_j . Da das grobe Gitter \mathcal{G}_{j_0} zu \mathcal{G} gehört, besitzt \mathcal{G} eine Darstellung als disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=j_0}^J \mathcal{G}_j \quad (3.24)$$

mit der Kardinalität

$$N := |\mathcal{G}| = \sum_{j=j_0}^J N_j.$$

Zur Berechnung der Hilbert-Transformation H auf einem ungleichmäßigen Gitter \mathcal{G} verwenden wir die Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ aus (3.20), wobei wir nur die Zeilen betrachten, die zu dem Gitter \mathcal{G} gehören. Dazu benötigen wir die Wavelet-Koeffizienten der Funktion $u \in W_2^s$, deren Hilbert-Transformation wir berechnen wollen. Da die Funktionswerte nur auf dem Gitter \mathcal{G} gegeben sind, brauchen wir ein Verfahren zur Bestimmung dieser Koeffizienten. In diesem Zusammenhang untersuchen wir die Inverse der Matrix $A := \left(\varphi_{j,k} \left(\frac{l}{2^j} \right) \right)_{k=0,l=0}^{2^j-1, 2^j-1} \in \mathbb{R}^{2^j \times 2^j}$, welche bei der Interpolation auf dem gleichmäßigen Gitter $\frac{l}{2^j}$, $l = 0, \dots, 2^j - 1$, auftritt. Dabei ist $\varphi_{j,0}$ der periodische skalierte B-Spline vom Grad $m \in 2\mathbb{N}_0 + 1$. Die Matrix A ist zirkulant und auf Grund des Trägers $\left[-\frac{m+1}{2^{j+1}}, \frac{m+1}{2^{j+1}} \right]$ von $\varphi_{j,0}$ dünn besetzt. Anhand von (2.21) erkennen wir,

dass die Inverse A^{-1} wiederum zirkulant ist. Im Gegensatz zu A ist A^{-1} für $m > 1$ nicht mehr dünn besetzt. Mit Hilfe der ersten Zeile \mathbf{a} von A und ihrer diskreten Fourier-Transformation $\hat{\mathbf{a}}$ bekommen wir durch die inverse diskrete Fourier-Transformation von $\frac{1}{\hat{\mathbf{a}}}$ die Einträge der ersten Zeile $\bar{\mathbf{a}}$ von A^{-1} . Für die Einträge von $\bar{\mathbf{a}}$ erhalten wir

Lemma 3.10 Sei $m = 3$ und $A = (\varphi_{j,k}(\frac{l}{2^j}))_{k=0,l=0}^{2^j-1,2^j-1} \in \mathbb{R}^{2^j \times 2^j}$ mit dem periodischen skalierten kubischen B-Spline $\varphi_{j,0}$. Für die erste Zeile $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{2^j-1})$ von A^{-1} gilt

$$\bar{a}_l = \sqrt{3} \left(\sqrt{3} - 2 \right)^l + \frac{B_{2r}}{2^{2rj} (2r)!} D_x^r f_l(\xi), \quad r \geq 1, \quad l = 0, \dots, 2^j-1,$$

$$\bar{a}_{2^j-1-l} = \bar{a}_{l+1}, \quad l = 0, \dots, 2^j-1,$$

mit den Funktionen $f_l(x) = \frac{3 \cos(2\pi x l)}{2 + \cos 2\pi x}$, den Bernoulli-Zahlen B_{2r} und $0 < \xi < 1$.

Beweis : Wir setzen $n = 2^j$ und berechnen die diskrete Fourier-Transformation der ersten Zeile von A

$$\hat{\varphi}_k := \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(l) e^{-2\pi i \frac{lk}{n}}.$$

Für $m = 3$ ist

$$\varphi(0) = \frac{2}{3}, \quad \varphi(1) = \frac{1}{6},$$

$$\varphi(n-1) = \frac{1}{6}, \quad \varphi(l) = 0, \quad l = 2, \dots, n-2.$$

Dadurch bekommen wir

$$\hat{\varphi}_k = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos 2\pi \frac{k}{n} \right).$$

Wir beginnen mit einer näherungsweisen Berechnung der Werte \bar{a}_l und geben anschließend eine Fehlerabschätzung. Nach (2.21) und dem Residuensatz ist (für $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)$)

$$\begin{aligned} \bar{a}_l &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n \hat{\varphi}_k} e^{2\pi i \frac{kl}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3e^{2\pi i \frac{kl}{n}}}{2 + \cos 2\pi \frac{k}{n}} \\ &\approx \int_0^1 \frac{3e^{2\pi i x l}}{2 + \cos 2\pi x} dx = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos lx + i \sin lx}{2 + \cos x} dx \\ &= \frac{3}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^l}{\frac{1}{2}z^2 + 2z + \frac{1}{2}} dz = \frac{6}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^l}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})} dz \\ &= 6 \operatorname{res} \left(\frac{z^l}{z^2 + 4z + 1}, -2 + \sqrt{3} \right) = 6 \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} (z + 2 - \sqrt{3}) \frac{z^l}{z^2 + 4z + 1} \\ &= \sqrt{3} \left(\sqrt{3} - 2 \right)^l \end{aligned}$$

für $l = 0, \dots, \frac{n}{2}$. Auf Grund der Symmetrie von $\widehat{\varphi}_k$ und der Exponentialfunktion haben wir

$$\bar{a}_l = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3 \cos\left(2\pi \frac{kl}{n}\right)}{2 + \cos 2\pi \frac{k}{n}},$$

$$\sqrt{3} \left(\sqrt{3} - 2\right)^l = \int_0^1 \frac{3 \cos(2\pi x l)}{2 + \cos 2\pi x} dx.$$

Somit ist \bar{a}_l eine Approximation des Integrals $\int_0^1 f_l(x) dx$ mittels der Rechteckregel. Da der Integrand f periodisch ist, stimmt die Rechteckregel mit der Trapezregel überein. Nach der Euler-Maclaurin Formel [50, Satz 4.3] folgt schließlich

$$\bar{a}_l - \sqrt{3} \left(\sqrt{3} - 2\right)^l = \frac{B_{2r}}{n^{2r}(2r)!} D_x^r f_l(\xi), \quad r \geq 1.$$

Die zweite Aussage des Lemmas folgt aus der Symmetrie von $\varphi(l)$, $l = 0, \dots, n-1$, beziehungsweise $\widehat{\varphi}_k$, $k = 0, \dots, n-1$, und den Eigenschaften der inversen diskreten Fourier-Transformation. #

Nach dem letzten Lemma sind die Einträge von $\bar{\mathbf{a}}$ gut lokalisiert, so dass wir die Matrix A^{-1} komprimieren können und eine dünn besetzte zirkulante Matrix A^* mit Bandstruktur erhalten.

Im Folgenden stellen wir eine Methode zur Berechnung der Wavelet-Koeffizienten auf einem ungleichmäßigen Gitter vor. Dazu nehmen wir uns ein zulässiges Gitter \mathcal{G} mit der Aufteilung (3.24) und dazugehörigen Funktionswerten $u(x)$, $x \in \mathcal{G}$, einer Funktion $u \in W_2^s$ her. Wir beginnen mit der Berechnung der Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$, $j = j_0, \dots, J$, nach Algorithmus 3.

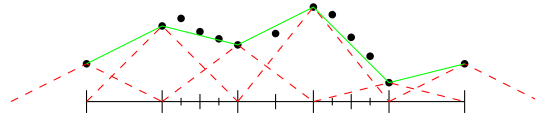
Algorithmus 3 : Bestimmung der Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$
Eingabe: $j_0 \dots$ grobes Level

 $J \dots$ feines Level

 $m \dots$ Regularität des B-Splines

 $\mathcal{G} \dots$ Gitter

 $u \in W_2^s$
Schritt 0: Setze $j = j_0$.

Schritt 1: Definiere $u(x) := 0$ für $x \notin \mathcal{G}_j$ und fasse die Funktionswerte $u\left(\frac{l}{2^j}\right)$, $l = -2^{j-1}, \dots, 2^{j-1}$ zu einem Spaltenvektor \mathbf{u} zusammen. Anschließend bestimme die Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$, durch $2^{-\frac{j}{2}} A^* \mathbf{u}$.

Schritt 2: Aktualisiere die Funktionswerte $u(x)$, $x \in \mathcal{G}$, durch

$$u(x) = 0, \quad x \in \mathcal{G}_j,$$

$$u(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{a}_{j,k} \varphi_{j,k}(x), \quad x \in \bigcup_{\nu=j+1}^J \mathcal{G}_\nu.$$


Schritt 3: Erhöhe j um eins und gehe zu Schritt 1 solange $j \leq J$.

Ausgabe: Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$, $j = j_0, \dots, J$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$

Bemerkung: Enthält das Gitter \mathcal{G}_j im Schritt 1 von Algorithmus 3 sämtliche Punkte, die zum Level j gehören, so invertieren wir die Matrix A nicht direkt, sondern lösen das Gleichungssystem mit Hilfe einer LU -Zerlegung oder der schnellen Fourier-Transformation. Das Ergebnis von Algorithmus 3 ist eine Funktion \tilde{u} mit der Darstellung

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{a}_{j,k} \varphi_{j,k}(x),$$

welche die Werte $u(x)$, $x \in \mathcal{G}$, approximiert. Um die Wavelet-Darstellung zu erhalten, gehen wir wie im Algorithmus 4 beschrieben vor.

Algorithmus 4 : modifizierte Wavelet-Zerlegung

Eingabe: Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$, $j = j_0, \dots, J$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$

j_0 ... grobes Level

J ... feines Level

m ... Regularität des B-Splines

\tilde{m} ... Anzahl der verschwindenden Momente des Wavelets

Schritt 0: Setze $j = J$.

Schritt 1: Führe eine Wavelet-Zerlegung der Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$ von j nach $j - 1$ aus mit Hilfe der Filterkoeffizienten \tilde{h}_n und \tilde{g}_n aus Tabelle 2.1 und (2.16)

$$\hat{a}_{j-1,k} = \sum_n \tilde{h}_{n-2k} \tilde{a}_{j,n}, \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1,$$

$$b_{j-1,k} = \sum_n \tilde{g}_{n-2k} \tilde{a}_{j,n}, \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1.$$

Schritt 2: Aktualisiere die Koeffizienten $\tilde{a}_{j-1,k}$ mittels

$$\tilde{a}_{j-1,k} = \tilde{a}_{j-1,k} + \hat{a}_{j-1,k}, \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1.$$

Schritt 3: Erniedrige j um eins und gehe zu Schritt 1 solange $j \geq j_0 + 1$.

Ausgabe: Wavelet-Koeffizienten $\hat{a}_{j_0,k}$, $k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1$, und $b_{j,k}$, $j = j_0, \dots, J - 1$,
 $k = 0, \dots, 2^j - 1$

Damit haben wir eine Möglichkeit, die Wavelet-Koeffizienten auf einem zulässigen Gitter \mathcal{G} zu berechnen, und können dadurch die Hilbert-Transformation H auf dem Gitter \mathcal{G} oder einem anderen zulässigen Gitter $\tilde{\mathcal{G}}$ mit Hilfe der Matrix \tilde{H} bestimmen.

3.5 Effektivität

In Kapitel 3.4 haben wir ein Verfahren zur Auswertung des Hilbert-Operators H auf einem zulässigen Gitter \mathcal{G} vorgestellt. In diesem Abschnitt wollen wir die Komplexität dieser Vorgehensweise untersuchen.

Wir beginnen mit dem Algorithmus 3 zur Bestimmung der Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$. Schritt 1 besteht aus einer Matrix-Vektor-Multiplikation, wobei $N_j := |\mathcal{G}_j|$ Einträge des Vektors \mathbf{u} von Null verschieden sind und die Matrix A^* eine zirkulante Bandstruktur besitzt. Bezeichnen wir die Bandbreite mit b , so läßt sich die Matrix-Vektor-Multiplikation mit $(b + \frac{b}{2}) N_j$ Rechenoperationen realisieren und wir erhalten dadurch $2N_j + 1 + b$ von Null verschiedene Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$.

Für die Aktualisierung der Funktionswerte im Schritt 2 des Algorithmus benötigen wir zur Berechnung einer Summe $\sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{a}_{j,k} \varphi_{j,k}$ nur $m+1$ Multiplikationen und m Additionen, da der Träger $[-\frac{m+1}{2^{j+1}}, \frac{m+1}{2^{j+1}}]$ von $\varphi_{j,0}$ kompakt ist. Insgesamt müssen wir $\sum_{k=j+1}^J N_k$ Funktionswerte berechnen. Folglich läßt sich dies mit

$$(2m+1) \sum_{k=j+1}^J N_k$$

Operationen erreichen. Summation von j_0 bis J liefert schließlich mit $N := |\mathcal{G}| = \sum_{j=j_0}^J N_j$

$$\sum_{j=j_0}^J \left[\frac{3}{2} b N_j + (2m+1) \sum_{k=j+1}^J N_k \right] \leq \frac{3}{2} b N + (2m+1) (J - j_0 + 1) N$$

und somit eine Komplexität von $\mathcal{O}(JN)$ zur Bestimmung der Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$, $j = j_0, \dots, J$.

Als nächstes untersuchen wir den Algorithmus, der aus den Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$ die Wavelet-Koeffizienten $\hat{a}_{j_0,k}$, $b_{j,k}$ bestimmt. Dazu bezeichnen wir mit n_h und n_g die Filterlänge der Koeffizienten \tilde{h}_k beziehungsweise \tilde{g}_k aus Tabelle 2.1 und (2.16). Weil $2N_j + 1 + b$ Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$ von Null verschieden sind, erfordert die Zerlegung im Schritt 1 von Algorithmus 4 von j zu $j-1$ $(n_h + \frac{n_h}{2} + n_g + \frac{n_g}{2}) (2N_j + 1 + b)$ Rechenoperationen und $2N_j + 1 + b + n_h$ Koeffizienten $\hat{a}_{j-1,k}$ verschwinden nicht. Die Aktualisierung der Koeffizienten $\tilde{a}_{j-1,k}$ benötigt somit $2N_j + 1 + b + n_h$ Additionen. Summieren wir von j_0 bis J ergibt das

$$3(n_h + n_g)N + 2N + (J - j_0 + 1) \left((1+b) \frac{3}{2} (n_h + n_g) + 1 + b + n_h \right)$$

Operationen und damit eine Komplexität von $\mathcal{O}(N)$.

Zum Abschluß haben wir die Auswertung des Hilbert-Operators auf dem Gitter $\tilde{\mathcal{G}}$ mit $\tilde{N} = |\tilde{\mathcal{G}}|$. Dazu fassen wir die Wavelet-Koeffizienten $\tilde{a}_{j_0,k}$, $b_{j,k}$ zu dem Vektor \mathbf{w} aus (3.17) zusammen und multiplizieren mit der Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ aus (3.20). Dies ist nach (3.21) mit einer Komplexität von $\mathcal{O}(J2^J)$ realisierbar. Da wir die Funktionswerte aber nicht auf dem gesamten feinen Gitter \mathcal{F}_J benötigen, betrachten wir nur die Zeilen, die zu dem Gitter $\tilde{\mathcal{G}}$ gehören. Damit reduziert sich der Aufwand auf $\mathcal{O}(J\tilde{N})$.

Insgesamt erhalten wir ein Verfahren zur Bestimmung des Hilbert-Operators H von einem zulässigen Gitter \mathcal{G} auf ein zulässiges Gitter $\tilde{\mathcal{G}}$ mit einer Komplexität $\mathcal{O}\left(J\left(N + \tilde{N}\right)\right)$, wobei $N = |\mathcal{G}|$ die Anzahl der Gitterpunkte von \mathcal{G} , $\tilde{N} = |\tilde{\mathcal{G}}|$ die Anzahl der Gitterpunkte von $\tilde{\mathcal{G}}$ und J das feinste Level ist.

3.6 Berechnung des Hilbert-Operators auf adaptiven Gittern

Kapitel 3.4 gibt uns die Möglichkeit der Auswertung des Hilbert-Operators H auf einem zulässigen Gitter \mathcal{G} . Es bleibt die Frage, wie man ein solches Gitter schrittweise konstruieren kann, so dass der Fehler zwischen der Funktion und seiner Interpolation auf dem Gitter klein ist. Dazu stellen wir zwei Verfahren vor, die näher erläutert werden. Die erste Variante beginnt mit dem feinen Gitter und entfernt Gitterpunkte dort, wo sich die Funktion gutartig verhält. Das zweite Verfahren startet mit dem groben Gitter und fügt sukzessive neue Punkte hinzu.

3.6.1 Von Fein zu Grob

Zur Konstruktion eines zulässigen Gitters \mathcal{G} betrachten wir die Funktion $u \in W_2^s[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und ihre Wavelet-Darstellung

$$u(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(x).$$

Jedem Wavelet $\psi_{j,k}$ ordnen wir eine Menge von Punkten zu. Der Träger von $\psi_{j,k}$ ist $\left[-\frac{m+\tilde{m}}{2^{j+1}}, \frac{m+\tilde{m}}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j}\right] + \frac{k}{2^j}$. Wie immer beschreibt $m \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ den Grad des Splines und $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ die Anzahl der verschwindenden Momente. Dabei ist zu beachten, dass der Träger außerhalb des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ liegen kann. Da die Funktionen $\psi_{j,k}$ 1-periodisch sind, betrachten wir die Träger und die Gitterpunkte modulo 1 und identifizieren sie mit Teilmengen des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $x \bmod 1$ die Zahl $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit $x - y \in \mathbb{Z}$. Analog verfahren wir mit den Trägern. Die Punktmenge

$$I_{j,k} := \left\{ -\frac{m+\tilde{m}}{2^{j+1}} + \frac{k}{2^j} + \frac{l}{2^{j+1}} \bmod 1 : l = 0, \dots, 2(m+\tilde{m}+1) \right\}$$

ordnen wir dem Wavelet $\psi_{j,k}$ zu. Anschließend wählen wir eine Menge $I \subseteq \{(j,k) : k = 0, \dots, 2^j - 1, j = j_0, \dots, J\}$ von Wavelets und bilden

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{j_0} \cup \left(\bigcup_{(j,k) \in I} I_{j,k} \right). \quad (3.25)$$

Das Gitter \mathcal{G} ist aber nicht notwendigerweise zulässig. Ist dies der Fall, so fügen wir entsprechende Punkte hinzu, so dass das Gitter \mathcal{G} zulässig wird. Diese Punkte sind gerade sukzessive die Punkte x_- von $x = -\frac{m+\tilde{m}}{2^{j+1}} + \frac{k}{2^j} \bmod 1$ beziehungsweise x_+ von $x = \frac{m+\tilde{m}}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} + \frac{k}{2^j} \bmod 1$ für $(j,k) \in I$, welche in (3.23) definiert sind.

Zur Wahl der Menge I dient der nächste Satz.

Satz 3.11 Gegeben sei die Funktion $u \in W_2^s$ mit der Darstellung

$$u(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(x).$$

Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$\tilde{b}_{j,k} := \begin{cases} b_{j,k}, & |b_{j,k}| \geq \delta_s(j) := \frac{\varepsilon}{\sqrt{C_s} 2^{(2s+1)\frac{j}{2}} \sqrt{J-j_0}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.26)$$

mit der Riesz-Konstante C_s aus (2.20) und

$$\tilde{u}(x) := \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{b}_{j,k} \psi_{j,k}(x).$$

Dann gilt für $0 \leq s < m + \frac{1}{2}$

$$\|u - \tilde{u}\|_{W_2^s} \leq \varepsilon.$$

Beweis : Wir haben mit (2.20)

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{W_2^s}^2 &\leq C_s \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{2js} \sum_{k=0}^{2^j-1} |b_{j,k} - \tilde{b}_{j,k}|^2 \\ &\leq C_s \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{2js} \sum_{k=0}^{2^j-1} \delta_s(j)^2 \\ &= C_s \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{2js} 2^j \delta_s(j)^2 \\ &= C_s \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{2js} 2^j \frac{\varepsilon^2}{C_s 2^{(2s+1)j} (J-j_0)} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

#

Mittels des “Threshold” $\delta_s(j)$ aus (3.26) bauen wir die Menge I auf. Wir betrachten dazu die Wavelet-Koeffizienten $b_{j,k}$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$, $j = j_0, \dots, J - 1$, der Funktion $u \in W_2^s$. Ist $|b_{j,k}| \geq \delta_s(j)$, so fügen wir (j, k) der Menge I hinzu. Anschließend erweitern wir die Menge I so, dass das zugehörige Gitter \mathcal{G} zulässig ist. In Abbildung 3.5 ist dieses Vorgehen für das Testbeispiel

$$u_2(t) = \operatorname{Re} \left(i \ln \left(\frac{1-pt}{1+pt} \right) \right), \quad t \in \mathbb{T},$$

mit $p = 0.97$ dargestellt. Der Balken gibt dabei die Verteilung der Gitterpunkte an. Je dunkler der Bereich, desto mehr Punkte befinden sich in diesem Abschnitt. An diesem Beispiel sehen wir, dass an den Stellen, wo die Funktion eine große Ableitung besitzt, mehr Gitterpunkte vorhanden sind als in dem Bereich, wo die Funktion nahezu konstant ist.

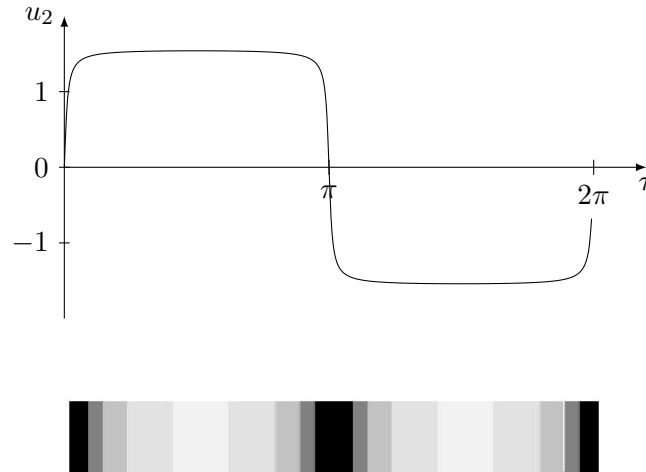


Abbildung 3.5: Graph der Funktion u_2 und Verteilung der Gitterpunkte

3.6.2 Von Grob zu Fein

Wir stellen jetzt ein Verfahren vor, dass ausgehend von dem groben Gitter \mathcal{G}_{j_0} ein zulässiges Gitter \mathcal{G} konstruiert. Dazu wählen wir die Parameter j_0 , J , m und \tilde{m} mit $j_0 < J$ und $m + \tilde{m} \in 2\mathbb{N}_0$ und betrachten eine Funktion $u \in W_2^s$. Dabei ist m der Grad des verwendeten B-Splines und \tilde{m} die Anzahl der verschwindenden Momente des entsprechenden Wavelets. Dann gehen wir wie im Algorithmus 5 beschrieben vor.

Algorithmus 5 liefert nicht für jede Funktion u das gewünschte Ergebnis. Ein Beispiel dafür ist die Funktion

$$u\left(\frac{l}{2^J}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } l = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Träger von u verschwindet auf dem groben Level und dadurch sind alle Wavelet-Koeffizienten im ersten Durchlauf sämtlich Null und das Ausgangsgitter stimmt mit dem groben Gitter wieder überein.

Algorithmus 5 : adaptive Berechnung der Hilbert-Transformation H

Eingabe: $j_0 \dots$ grobes Level

$J \dots$ feines Level

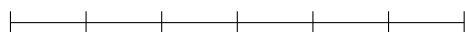
$m \dots$ Regularität des B-Splines

$\tilde{m} \dots$ Anzahl der verschwindenden Momente

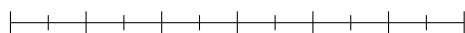
$\varepsilon \dots$ Genauigkeit

$u \in W_2^s$

Schritt 0: Setze $\mathcal{G} := \left\{ \frac{l}{2^{j_0}} : l = -2^{j_0-1}, \dots, 2^{j_0-1} - 1 \right\}$.

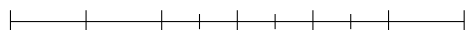


Schritt 1: Füge den Punkt $x \in \mathcal{F}_J$ dem Gitter \mathcal{G} hinzu, wenn gilt $x_- \in \mathcal{G}$ und $x_+ \in \mathcal{G}$.



Schritt 2: Werte die Funktion u auf dem Gitter \mathcal{G} aus und berechne die Hilbert-Transformation Hu . Bestimme die Wavelet-Koeffizienten \mathbf{w}_u und \mathbf{w}_{Hu} von u beziehungsweise Hu auf dem Gitter \mathcal{G} .

Schritt 3: Konstruiere das neue Gitter \mathcal{G} anhand der Wavelet-Koeffizienten \mathbf{w}_u und \mathbf{w}_{Hu} durch (3.25).



Schritt 4: Fahre fort mit Schritt 1.

Ausgabe: zulässiges Gitter \mathcal{G} und die Werte von Hu auf \mathcal{G}

Aus diesem Grund versuchen wir die Funktionen zu charakterisieren, für die der Algorithmus ein angemessenes Ergebnis liefert. Als eine erste Charakterisierung betrachten wir

Definition 3.12 Die Funktion $u \in L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ heißt q -balanciert, wenn die Wavelet-Koeffizienten $b_{j,k}$ von u die Bedingungen

$$|b_{j,k}|^2 \leq \frac{q}{2} \frac{1}{2M+1} \sum_{l=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - M}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + M} |b_{j-1,l}|^2, \quad j = j_0 + 1, \dots, \quad (3.27)$$

$$k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

erfüllen.

Bemerkung: Die Konstante M in Definition 3.12 ist von dem betrachteten Wavelet ψ abhängig. Sie wird so gewählt, dass sich der Träger von $\psi_{j,k}$ mit den Trägern von $\psi_{j-1,l}$, $l = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - M, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + M$, schneidet. In Tabelle 3.3 sind die Werte für $m = 1$ und $m = 3$ aufgeführt.

m	M
1	$\lfloor \frac{3\tilde{m}+9}{4} \rfloor$
3	$\lfloor \frac{3\tilde{m}+15}{4} \rfloor$

Tabelle 3.3: Werte des Parameters M

Die Bedingung (3.27) sichert, dass sich große Wavelet-Koeffizienten auf dem Level j lokal auch in großen Wavelet-Koeffizienten auf dem gröberen Level $j - 1$ widerspiegeln. Die Hoffnung besteht darin, dass dadurch alle entsprechenden Koeffizienten der Funktion u durch das Gitter wiedergegeben werden. Das Problem mit der Bedingung (3.27) ist aber folgendermaßen. Bezeichnet \hat{u} die Funktion, welche die Funktion u während des Algorithmus auf dem aktuellen Gitter interpoliert, so ändern sich die entsprechenden Wavelet-Koeffizienten im Verlauf des Algorithmus, da durch Hinzunahme eines neuen Levels und der entsprechenden Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$ auf Grund der Wavelet-Zerlegung alle vorher berechneten Koeffizienten korrigiert werden. Somit ist es schwierig zu erkennen, wie sich die berechneten Koeffizienten zu deren exakten Werten verhalten. Außerdem kann man Beispiele von Funktionen angeben, die auf dem groben und dem nächst feineren Gitter verschwinden, aber die Bedingung (3.27) erfüllen, es sei denn q ist hinreichend klein. Damit ist es möglich, Beispiele zu konstruieren, so dass der Fehler zwischen der Funktion u und dem Ergebnis des Algorithmus beliebig groß wird.

Aus diesen Gründen suchen wir nach einer alternativen Charakterisierung von Funktionen, für welche der Algorithmus ein akzeptables Ergebnis liefert. Bei näherer Untersuchung des Algorithmus erkennt man, dass sich die Koeffizienten $\tilde{a}_{j,k}$ bei stückweise linearer Interpolation auf dem aktuellen Gitter nicht ändern. Deshalb untersuchen wir für $m = 1$ das Funktionensystem

$$\{\varphi_{j_0,k} : k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1\} \cup \{\varphi_{j,2k+1} : j = j_0 + 1, \dots; k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1\} \quad (3.28)$$

und die Darstellung der Funktion u durch

$$u(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} a_{j,k} \varphi_{j,2k+1}(x). \quad (3.29)$$

In Abbildung 3.6 sind die Graphen des Funktionensystems (3.28) dargestellt. Wir bekommen

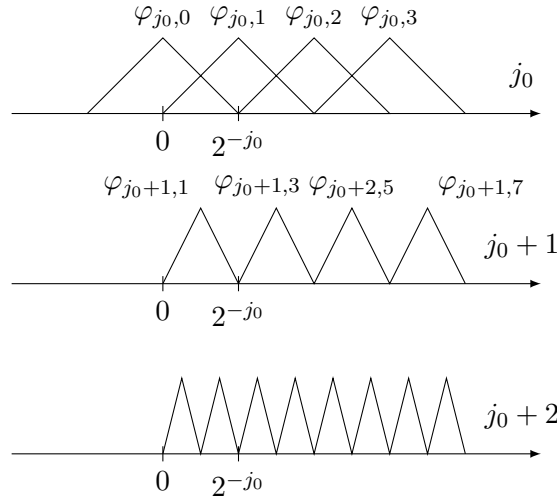


Abbildung 3.6: Funktionensystem (3.28)

Satz 3.13 Sei $m = 1$. Das Funktionensystem (3.28) bildet eine Riesz-Basis von $W_2^1[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Besitzt $u \in W_2^1[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ die Darstellung (3.29), so folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^1}^2 &\leq C \left(\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} |a_{j_0,k}|^2 + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \right), \\ \|u\|_{W_2^1}^2 &\geq c \left(\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} |a_{j_0,k}|^2 + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \right). \end{aligned}$$

Beweis : Wir beginnen mit dem endlichen System

$$\{\varphi_{j,2k+1} : j = j_0 + 1, \dots, J; k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1\}$$

und ordnen diese Funktionen wie folgt,

$$\begin{array}{cccccc}
 \varphi_{j_0+1,1}, & \varphi_{j_0+2,1}, & \varphi_{j_0+2,3}, & \varphi_{j_0+3,1}, & \dots & \varphi_{J,2^{J-j_0}-1}, \\
 \varphi_{j_0+1,3}, & \varphi_{j_0+2,5}, & \varphi_{j_0+2,7}, & \varphi_{j_0+3,9}, & \dots & \varphi_{J,2^{J-j_0+1}-1}, \\
 & \dots & & \dots & & \dots \\
 \varphi_{j_0+1,2^{j_0}-1}, & \varphi_{j_0+2,2^{j_0+2}-3}, & \varphi_{j_0+2,2^{j_0+2}-1}, & \varphi_{j_0+3,2^{j_0+3}-7}, & \dots & \varphi_{J,2^J-1}.
 \end{array}$$

Wir beginnen mit einer Funktion $\varphi_{j_0+1,k}$ des Levels $j_0 + 1$ und wählen alle Funktionen $\varphi_{j,k}$ beginnend mit dem Level $j_0 + 2$, die mit $\varphi_{j_0+1,k}$ einen gemeinsamen Träger besitzen. In dieser Reihenfolge geben wir den obigen Funktionen die neue Bezeichnung f_k , $k = 1, \dots, 2^{J-1} - 2^{j_0}$. Im nächsten Schritt normieren wir die Funktionen f_k bezüglich der W_2^1 -Norm. Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir

$$\Delta_j^2 := \|\varphi_{j,k}\|_{W_2^1}^2 = 2 \left(\frac{1}{3} + 2^{2j} \right), \quad j = j_0 + 1, \dots,$$

und definieren $e_k := \frac{f_k}{\Delta_j}$, wobei wir j entsprechend der Definition von f_k wählen. Anschließend betrachten wir die Gram-Matrix $G = (\langle e_k, e_n \rangle + \langle D_x e_k, D_x e_n \rangle)_{k=1, n=1}^{2^{J-1}-2^{j_0}, 2^{J-1}-2^{j_0}}$ und bekommen auf Grund der obigen Nummerierung und des kompakten Trägers von φ die folgende Gestalt von G

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_{2^{j_0}} \end{pmatrix}$$

mit $G_l = (\langle e_k, e_n \rangle + \langle D_x e_k, D_x e_n \rangle)_{k=(l-1)(2^{J-j_0}-1)+1, n=(l-1)(2^{J-j_0}-1)+1}^{l(2^{J-j_0}-1), l(2^{J-j_0}-1)}$. Da sich die Funktionen e_k und $e_{k+2^{J-j_0}-1}$ nur um eine Verschiebung unterscheiden, haben wir $G_1 = G_l$, $l = 2, \dots, 2^{j_0}$. Somit genügt es, die Eigenwerte von G_1 zu bestimmen, um die Eigenwerte von G zu erhalten. Nähere Untersuchungen der Matrix G_1 zeigen, dass nur die erste Zeile (beziehungsweise erste Spalte) vollbesetzt ist und deswegen die Zeilensumme am größten ist. Da die Funktionen $D_x e_k$ orthogonal zueinander sind (Haar-System), bekommen wir für die

Einträge der ersten Zeile von G_1 außerhalb der Hauptdiagonalen

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_{j_0+1,1}, \varphi_{j,2k+1} \rangle &= \frac{\sqrt{2}^{3(j_0+1)}}{\sqrt{2}^{3j}} (2k+1), & j = j_0+2, \dots, J, \\
 & & k = 0, \dots, 2^{j-j_0-2} - 1, \\
 \langle \varphi_{j_0+1,1}, \varphi_{j,2^{j-j_0-1}-2k-1} \rangle &= \frac{\sqrt{2}^{3(j_0+1)}}{\sqrt{2}^{3j}} (2k+1), & j = j_0+2, \dots, J, \\
 & & k = 0, \dots, 2^{j-j_0-2} - 1.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Summation all dieser Werte liefert unter Beachtung der Normierung

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=j_0+2}^J \sum_{k=0}^{2^{j-j_0-1}-1} \langle \frac{1}{\Delta_{j_0+1}} \varphi_{j_0+1,1}, \frac{1}{\Delta_j} \varphi_{j,2k+1} \rangle &= \sum_{j=j_0+2}^J 2 \sum_{k=0}^{2^{j-j_0-2}-1} \frac{1}{\Delta_{j_0+1} \Delta_j} \frac{\sqrt{2}^{3(j_0+1)}}{\sqrt{2}^{3j}} (2k+1) \\
 &= \sum_{j=j_0+2}^J \frac{2}{\Delta_{j_0+1} \Delta_j} \frac{\sqrt{2}^{3(j_0+1)}}{\sqrt{2}^{3j}} (2^{j-j_0-2} + 2^{j-j_0-2} (2^{j-j_0-2} - 1)) \\
 &= \sum_{j=j_0+2}^J \frac{1}{\Delta_{j_0+1} \Delta_j} \frac{\sqrt{2}^{3(j_0+1)}}{\sqrt{2}^{3j}} 2^{2j-2j_0-3} \\
 &= \sum_{j=j_0+2}^J \frac{1}{\Delta_{j_0+1} \Delta_j} \sqrt{2}^{j-j_0-3} = \frac{1}{\Delta_{j_0+2}} \sum_{j=j_0+1}^J \frac{\sqrt{2}^{j-j_0-3}}{\sqrt{2}(\frac{1}{3} + 2^{2j})} \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}^{-j_0-3}}{\sqrt{2} \Delta_{j_0+1}} \sum_{j=j_0+2}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^j}{2^j} = \frac{\sqrt{2}^{-j_0-3}}{\sqrt{2} \Delta_{j_0+1}} \frac{\sqrt{2}^{j_0+2}}{2^{j_0+2}} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &= \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} \frac{1}{2^{j_0+1} \Delta_{j_0+1}} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} \frac{1}{2^{j_0+1} \sqrt{2(\frac{1}{3} + 2^{2j_0+2})}} \\
 &\leq \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)} 2^{-2j_0-2}.
 \end{aligned}$$

Dieser Wert ist unabhängig von J . Somit liegen die Eigenwerte der Gram-Matrix G für jedes $J > j_0 + 1$ nach dem Satz von Gerschgorin im Intervall

$$[A, B] := \left[1 - \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)} 2^{-2j_0-2}, 1 + \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)} 2^{-2j_0-2} \right].$$

Folglich gilt für $u(x) = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} a_{j,k} \frac{1}{\Delta_j} \varphi_{j,2k+1}(x)$

$$A \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \leq \|u\|_{W_2^1}^2 \leq B \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2$$

und damit für $u(x) = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} a_{j,k} \varphi_{j,2k+1}(x)$

$$\begin{aligned} A \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \Delta_j^2 \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 &\leq \|u\|_{W_2^1}^2 \leq B \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \Delta_j^2 \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2, \\ A \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{3} + 2^{2j} \right) \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 &\leq \|u\|_{W_2^1}^2 \leq B \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{3} + 2^{2j} \right) \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2, \\ 2A \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 &\leq \|u\|_{W_2^1}^2 \leq 2B \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 2^{2j_0}} \right) \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Für den groben Anteil $\{\varphi_{j_0,k} : k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1\}$ untersuchen wir den Winkel zwischen den Räumen V_{j_0} und $\bigcup_{j>j_0} \widehat{V}_j$ mit

$$\widehat{V}_j := \text{span} \{ \varphi_{j,2k+1} : k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1 \}.$$

Dabei definieren wir den Winkel zwischen zwei Unterräumen E und F von X durch

$$\angle(E, F) := \inf_{e \in E, f \in F} \arccos \frac{|\langle e, f \rangle_X|}{\|e\|_X \|f\|_X}.$$

Für

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x), \\ g(x) &= \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} a_{j,k} \varphi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

bekommen wir

$$\langle f, g \rangle + \langle D_x f, D_x g \rangle = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{2^{j-1}-1} a_{j_0,k} a_{j,\kappa} \langle \varphi_{j_0,k}, \varphi_{j,2\kappa+1} \rangle,$$

da das Funktionensystem

$$\{D_x \varphi_{j_0,k} : k = 0, \dots, 2^{j_0} - 1\} \cup \{D_x \varphi_{j,2k+1} : j = j_0 + 1, \dots; k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1\}$$

orthogonal zueinander steht. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gelangen wir zu

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle + \langle D_x f, D_x g \rangle|^2 &\leq \left(\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{2^{j-1}-1} 2^{-2j} |\langle \varphi_{j_0,k}, \varphi_{j,2\kappa+1} \rangle|^2 \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} |a_{j_0,k}|^2 \right) \left(\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{2^{j-1}-1} 2^{2j} |a_{j,\kappa}|^2 \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 2.6, (3.30) und (3.31) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle + \langle D_x f, D_x g \rangle|^2 &\leq \left(2 \cdot 2^{j_0} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-j_0-1}-1} 2^{-2j} \frac{2^{3j_0}}{2^{3j}} (2k+1)^2 \right) 3 \|f\|_{L_2}^2 \frac{1}{2A} \|g\|_{W_2^1}^2 \\ &\leq \frac{1}{15} 2^{1-j_0} \frac{1}{A} \|f\|_{W_2^1}^2 \|g\|_{W_2^1}^2. \end{aligned}$$

Für $j_0 \geq 0$ folgt mit der Definition von A

$$\frac{1}{15} 2^{1-j_0} \frac{1}{A} \leq \frac{2}{15} \frac{1}{1 - \frac{1}{16(\sqrt{2}-1)}} < 1.$$

Somit ist der Winkel zwischen V_{j_0} und $\bigcup_{j>j_0} \widehat{V}_j$ nach unten durch eine positive Konstante beschränkt. Die Behauptung folgt nun aus der Äquivalenz

$$(1 - \cos \alpha) \left(\|f\|_{W_2^1}^2 + \|g\|_{W_2^1}^2 \right) \leq \|f + g\|_{W_2^1}^2 \leq 2 \left(\|f\|_{W_2^1}^2 + \|g\|_{W_2^1}^2 \right)$$

mit $\alpha = \angle \left(V_{j_0}, \bigcup_{j>j_0} \widehat{V}_j \right)$, (3.31) und (2.20). #

Analog zu (3.27) definieren wir nun

Definition 3.14 Sei $m = 1$ und $u \in W_2^1$ mit

$$u(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} a_{j,k} \varphi_{j,2k+1}(x).$$

Die Funktion u heißt 1-balanciert, wenn die Koeffizienten $a_{j,k}$ die Bedingungen

$$|a_{j,k}|^2 \leq \frac{1}{8} \frac{1}{2M+1} \sum_{l=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - M}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + M} |a_{j-1,l}|^2, \quad j = j_0 + 2, \dots, \quad (3.32)$$

$$k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1,$$

mit $M = \lfloor \frac{3\tilde{m}+9}{4} \rfloor$ erfüllen.

Bemerkung: Der Faktor $\frac{1}{8}$ in (3.32) wurde gerade so gewählt, dass aus $|a_{j-1,l}| \leq \delta_1(j-2)$, $l = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - M, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + M$, die Bedingung $|a_{j,k}| \leq \delta_1(j-1)$ folgt. Dabei ist $\delta_1(j)$ der Threshold aus (3.26) für $s = 1$.

Wir ändern den Algorithmus 5 und passen das Gitter nicht anhand der Wavelet-Koeffizienten $b_{j,k}$ an, sondern mit Hilfe der Koeffizienten $a_{j,k}$. Dabei verwenden wir die Darstellung (3.25) und konstruieren die Menge I nach

$$(j, k) \in I \Leftrightarrow |a_{j+1,k}| \geq \delta_1(j).$$

Für den geänderten Algorithmus bekommen wir

Satz 3.15 Sei $m = 1$ und $u \in W_2^s$, $s > 1$. Weiterhin sei u 1-balanciert und $\varepsilon > 0$. Dann existieren positive Konstanten D und \tilde{D} unabhängig von ε , so dass der geänderte Algorithmus 5 ein zulässiges Gitter \mathcal{G} und eine Funktion \hat{u} mit

$$\|u - \hat{u}\|_{W_2^1} \leq D\varepsilon, \quad \left\|Hu - \tilde{H}\hat{u}\right\|_{W_2^1} \leq \tilde{D}\varepsilon,$$

liefert.

Beweis : Sei $u \in W_2^s$, $s > 1$, 1-balanciert mit der Darstellung

$$u(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} a_{j,k} \varphi_{j,2k+1}(x).$$

Zu Beginn des Algorithmus haben wir das grobe Gitter $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}_{j_0}$ als Startgitter und die Funktion

$$\hat{u}_0(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x),$$

welche die Funktion u auf dem Gitter \mathcal{G}_0 interpoliert. Der Fehler beträgt nach Satz 3.13

$$E_0^2 := \|u - \hat{u}_0\|_{W_2^1}^2 \leq C \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2.$$

Mit $\tilde{\mathcal{G}}_1$ bezeichnen wir das nach Schritt 1 gebildete Gitter durch Hinzufügen der Mittelpunkte.

Die dazugehörige Funktion, welche die Funktion u auf dem Gitter $\tilde{\mathcal{G}}_1$ interpoliert, bezeichnen wir mit

$$\tilde{u}_1(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0+1,k} \varphi_{j_0+1,2k+1}(x).$$

Nach Schritt 2 (Threshold) bekommen wir die Funktion

$$\hat{u}_1(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \hat{a}_{j_0+1,k} \varphi_{j_0+1,2k+1}(x)$$

mit

$$\hat{a}_{j_0+1,k} = \begin{cases} 0, & |a_{j_0+1,k}| < \delta_1(j_0) \\ a_{j_0+1,k}, & \text{sonst} \end{cases}$$

und das dazugehörige Gitter \mathcal{G}_1 . Der Fehler setzt sich zusammen aus

$$\begin{aligned} E_1^2 &:= \|u - \hat{u}_1\|_{W_2^1}^2 \\ &\leq C \left(2^{2j_0+2} \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} |a_{j_0+1,k} - \hat{a}_{j_0+1,k}|^2 + \sum_{j=j_0+2}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \right) \\ &= C \left(2^{2j_0+2} \sum_{k \in \mathcal{I}_{j_0+1}^0} |a_{j_0+1,k}|^2 + \sum_{j=j_0+2}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \right) \end{aligned}$$

mit $\mathcal{I}_{j_0+1}^0 := \{k \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq k \leq 2^{j_0} - 1 \text{ und } \widehat{a}_{j_0+1,k} = 0\}$. Allgemein starten wir von dem (zulässigen) Gitter \mathcal{G}_{i-1} , $1 \leq i \leq J - j_0$, und der dazugehörigen Funktion

$$\widehat{u}_{i-1}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+i-1} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \widehat{a}_{j,k}^{(i-1)} \varphi_{j,2k+1}(x).$$

Während des Algorithmus erhalten wir die Gitter $\widetilde{\mathcal{G}}_i$ und \mathcal{G}_i mit den entsprechenden Funktionen

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_i(x) &= \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+i} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \widetilde{a}_{j,k}^{(i)} \varphi_{j,2k+1}(x) \\ \text{bzw. } \widehat{u}_i(x) &= \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+i} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \widehat{a}_{j,k}^{(i)} \varphi_{j,2k+1}(x). \end{aligned}$$

Der Fehler beträgt

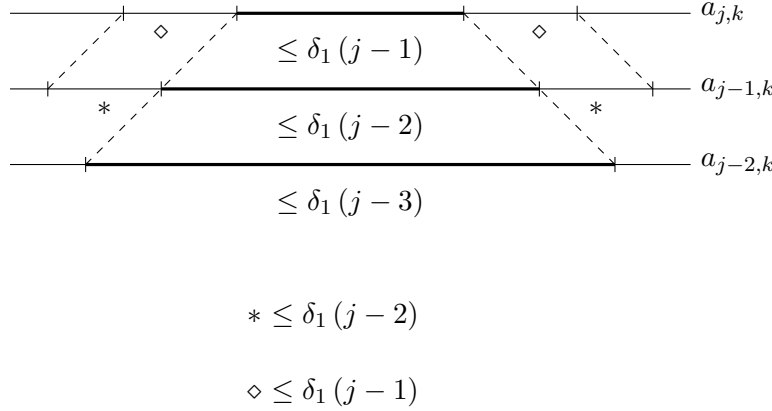
$$\begin{aligned} E_i^2 &:= \|u - \widehat{u}_i\|_{W_2^1}^2 \\ &\leq C \left(\sum_{j=j_0+1}^{j_0+i} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k} - \widehat{a}_{j,k}^{(i)}|^2 + \sum_{j=j_0+i+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \right) \\ &= C \left(\sum_{j=j_0+1}^{j_0+i} 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{I}_j^0} |a_{j,k}|^2 + \sum_{j=j_0+i+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathcal{I}_j^0 := \{k \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq k \leq 2^{j-1} - 1 \text{ und } \widehat{a}_{j,k}^{(i)} = 0\}$ die Menge der Indizes, wo die Koeffizienten $\widehat{a}_{j,k}^{(i)}$ von \widehat{u}_i Null sind. Es sind zwei Fälle möglich, weshalb diese Koeffizienten verschwinden. Der erste Grund ist, dass die Koeffizienten $\widetilde{a}_{j,k}^{(i)}$ betragsmäßig kleiner als der Threshold $\delta_1(j-1)$ sind. Im zweiten Fall sind die Koeffizienten “nicht berechnet” worden. Das heißt, der entsprechende Gitterpunkt gehört nicht zum Gitter $\widetilde{\mathcal{G}}_i$. Dies bedeutet, dass im vorhergehenden Durchlauf die Koeffizienten $\widehat{a}_{j-1,\kappa}^{(i-1)}$ betragsmäßig kleiner als der Threshold $\delta_1(j-2)$ waren. Entweder sind die Koeffizienten direkt berechnet worden oder die Koeffizienten sind nicht berechnet worden, da die entsprechenden Gitterpunkte nicht zum Gitter gehörten. Im letzteren Fall können wir die Argumentation wiederholen bis wir am Anfang des Algorithmus angekommen sind. Dadurch haben wir

$$|a_{j-1,\kappa}| \leq \delta_1(j-2).$$

Durch die Bedingung (3.32) gelangen wir dann zu

$$|a_{j,k}| \leq \delta_1(j-1), \quad k \in \mathcal{I}_j^0.$$



Das obige Schema zeigt diese Vorgehensweise nochmals auf. Nach $(J - j_0 - 1)$ Durchläufen des Algorithmus bekommen wir ein Gitter \mathcal{G}_{J-j_0-1} und die Funktion

$$\widehat{u}_{J-j_0-1}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^J \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \widehat{a}_{j,k}^{(J-j_0-1)} \varphi_{j,2k+1}(x).$$

Der Fehler E_{J-j_0-1} setzt sich zusammen aus

$$E_{J-j_0-1}^2 \leq C \left(\sum_{j=j_0+1}^J 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{I}_j^0} |a_{j,k}|^2 + \sum_{j=J+1}^{\infty} 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} |a_{j,k}|^2 \right).$$

Für den Anteil $\sum_{j=j_0+1}^J 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{I}_j^0} |a_{j,k}|^2$ bekommen wir nach obigen Betrachtungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0+1}^J 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{I}_j^0} |a_{j,k}|^2 &\leq \sum_{j=j_0+1}^J 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{I}_j^0} \delta_1(j-1)^2 \\ &\leq \sum_{j=j_0+1}^J 2^{2j} \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \frac{\varepsilon^2}{C_1 2^{3(j-1)} (J-j_0)} \\ &\leq \frac{4\varepsilon^2}{C_1}. \end{aligned}$$

Der restliche Anteil repräsentiert gerade den Interpolationsfehler der Funktion u auf dem gleichmäßigen Gitter \mathcal{F}_J , gemessen in der W_2^1 -Norm. Dieser kann mit Satz 2.7 abgeschätzt werden und wir wählen J so groß, so dass der Fehler kleiner wird als ε . Damit erhalten wir insgesamt

$$E_{J-j_0-1} \leq \underbrace{\sqrt{C \left(\frac{4}{C_1} + 1 \right)}}_{=:D} \varepsilon.$$

Die Abschätzung für die Hilbert-Transformation folgt dann aus Satz 3.8.

#

Bemerkung: Durch die Anpassung des Gitters im dritten Schritt des Algorithmus anhand der Wavelet-Koeffizienten der Funktion u und ihrer Hilbert-Transformation erreichen wir eine bessere Approximation.

Die Bedingung (3.27) mit den Wavelet-Koeffizienten einer Funktion u ist nicht ausreichend, um Funktionen zu charakterisieren, so dass der Algorithmus 5 ein vernünftiges Ergebnis liefert. Im Gegensatz dazu zeigt Satz 3.15 unter der Bedingung (3.32), dass wir durch den geänderten Algorithmus 5 ein sinnvolles Resultat erhalten. Die Bedingung (3.32) ist aber keine Charakterisierung bezüglich der Wavelet-Koeffizienten sondern in Bezug auf die Koeffizienten der Skalierungsfunktion über die verschiedenen Levels. Außerdem gilt dies nur für den linearen Fall. Um Funktionen mittels ihrer Wavelet-Koeffizienten zu charakterisieren, könnte man die folgende Modifikation von (3.27) durchführen. Für eine Funktion u mit Wavelet-Koeffizienten $b_{j,k}$ stellen wir die Bedingung

$$\frac{1}{n_j} \sum_{\nu=j+1}^{j+1+n_j} \frac{1}{2M_\nu + 1} \sum_{l \in I_\nu} |b_{\nu,l}|^2 \leq \frac{q}{2} \frac{1}{2M_j + 1} \sum_{l \in I_j} |b_{j,l}|^2 \quad (3.33)$$

auf. Die Konstanten n_j , M_ν und die Mengen I_ν müßten dabei so gewählt werden, so dass man zeigen könnte, dass eine Funktion, welche die Bedingung (3.33) erfüllt, nicht auf dem Gitter zum Level j und $j+1$ gleichzeitig verschwinden kann. Dann erhält man ein ähnliches Ergebnis wie Satz 3.15. Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 3.15 mit kleinen Änderungen. Dies bedarf aber näherer Untersuchungen.

3.7 Numerische Ergebnisse

Wir beginnen mit der Berechnung der Hilbert-Transformation H der periodischen B-Splines $\varphi_{j,0}$. Wir vergleichen unser Verfahren mit dem sogenannten Wittich-Operator. Dabei ist der Wittich-Operator wie folgt definiert.

Gegeben sei ein gleichmäßiges Gitter des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit Schrittweite 2^{-J} und eine Funktion $u \in L_2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Wir fassen die Funktionswerte von u auf dem Gitter zu dem Vektor \mathbf{u} zusammen und bilden die diskrete Fourier-Transformation $\hat{\mathbf{u}}$ von \mathbf{u} . Anschließend bestimmen wir

$$\hat{v}_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \text{ oder } k = 2^{J-1} \\ i\hat{u}_k, & k = 1, \dots, 2^{J-1} - 1 \\ -i\hat{u}_k, & k = 2^{J-1} + 1, \dots, 2^J - 1 \end{cases}, \quad k = 0, \dots, 2^J - 1,$$

und bekommen durch die inverse Fourier-Transformation von $\hat{\mathbf{v}}$ eine Approximation der Hilbert-Transformation von u .

Die Differenz zwischen den Werten von $H\varphi_{j,0}$, berechnet zum einen durch den Wittich-

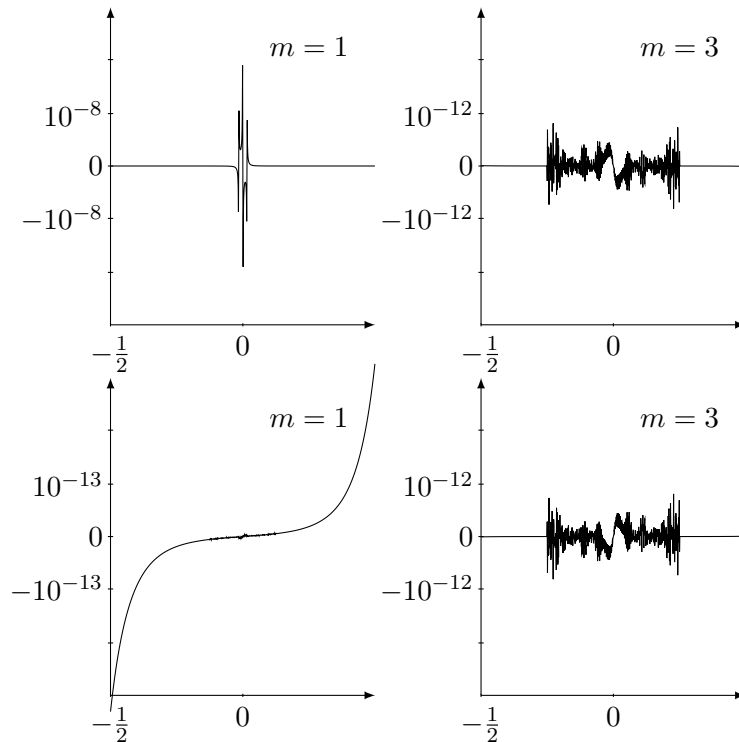


Abbildung 3.7: Differenz von $H\varphi_{j,0}$ berechnet durch den Wittich-Operator und Algorithmus 2 (oben) sowie für den Algorithmus 2 und die exakten Werte (unten)

Operator, ausgewertet auf einem gleichmäßigen Gitter mit 2^{20} Punkten, und zum anderen durch den Algorithmus 2, zeigt der obere Teil von Abbildung 3.7. Dabei ist $j = 6$ und $J = 12$ für den Algorithmus gewählt worden. Die linke Seite der Abbildung 3.7 zeigt den Fall $m = 1$ und rechts ist $m = 3$ zu sehen. Der untere Abschnitt gibt die Differenz zwischen den Werten von $H\varphi_{j,0}$ berechnet durch Algorithmus 2 und den exakten Funktionswerten an. Zur Bestimmung dieser Werte ist das Integral des Hilbert-Operators explizit mit *MATHEMATICA* berechnet worden und auf dem Gitter mit einer Genauigkeit von 16 Stellen ausgewertet worden. Der Unterschied bei $m = 1$ zeigt, dass der Wittich-Operator in diesem Fall eine schlechtere Approximation liefert, obwohl die Diskretisierung bereits sehr fein gewählt worden ist.

Eine ähnliche Darstellung der Differenz bekommen wir für die Auswertung der Hilbert-Transformation der Wavelets $\psi_{j,0}$ mit Hilfe des Algorithmus 1. Abbildung 3.8 stellt das Ergebnis für einige Werte von m und \tilde{m} mit $j = 6$ und $J = 12$ dar. Die etwas schlechtere Approximation für $m = 1$ lässt sich wieder auf die schlechte Approximation des Wittich-Operators zurückführen.

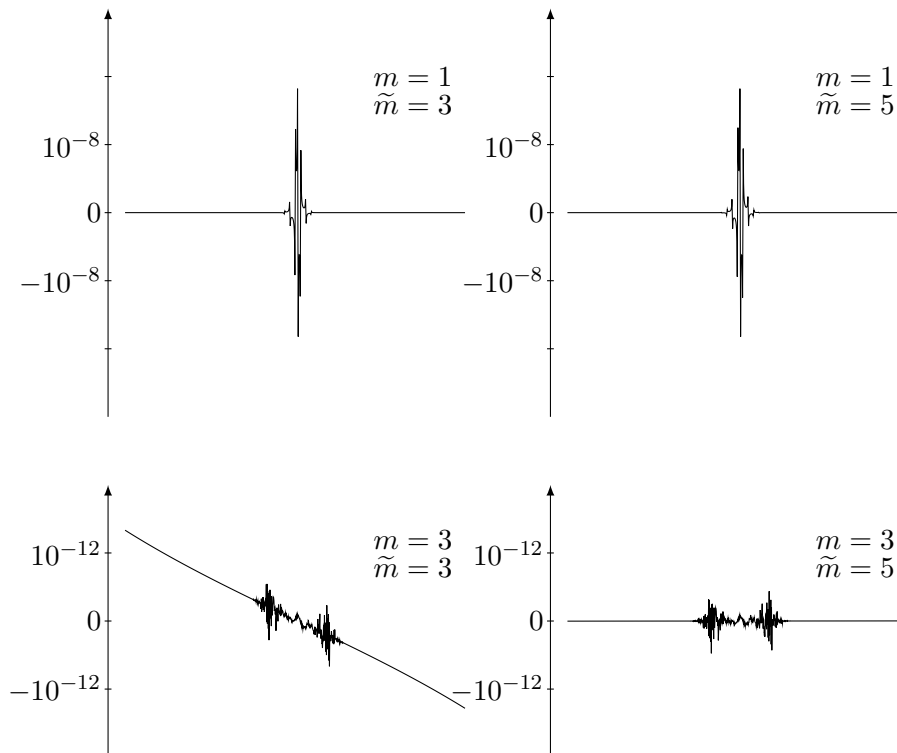


Abbildung 3.8: Differenz von $H\psi_{j,0}$ berechnet durch den Wittich-Operator und Algorithmus 1

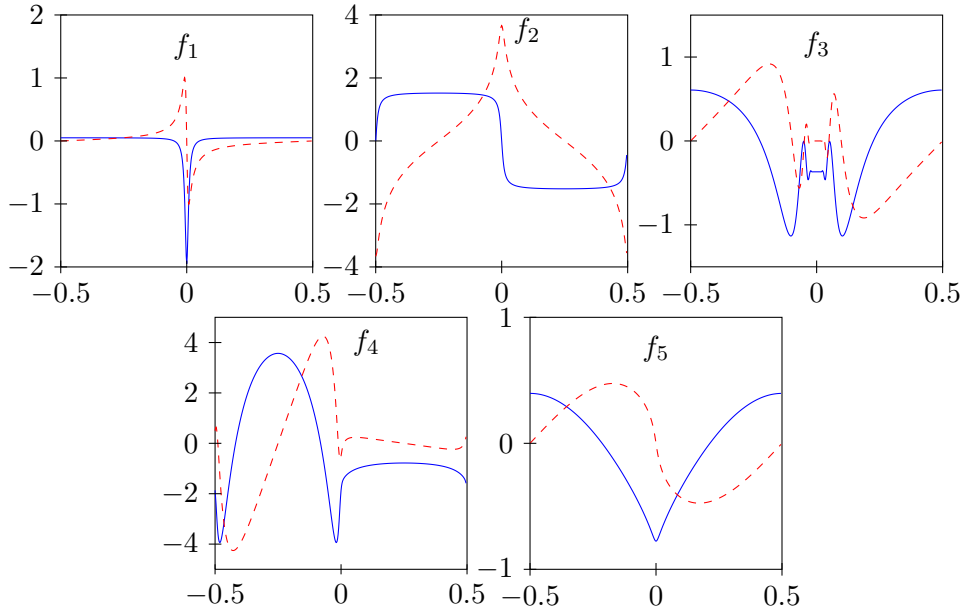


Abbildung 3.9: Graph von Real- und Imaginärteil der Testbeispiele

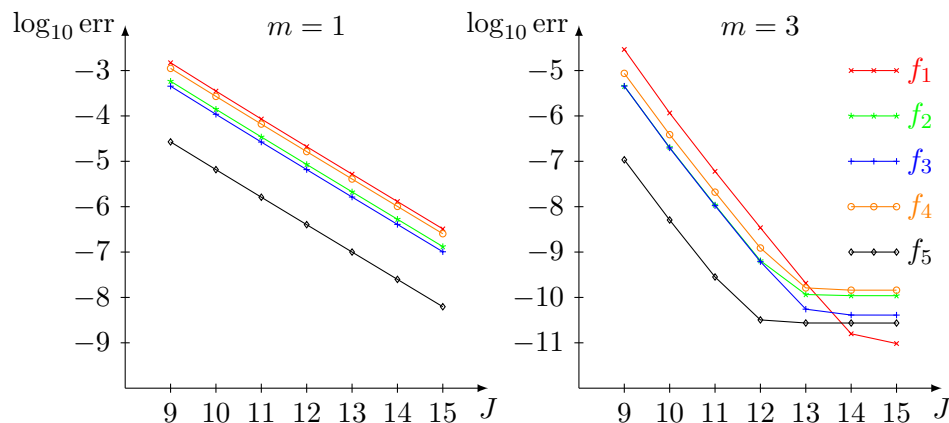
Als nächstes untersuchen wir die Berechnung der Hilbert-Transformation auf dem gleichmäßigen Gitter mit Hilfe der Matrix (3.20). Dazu verwenden wir 5 Testbeispiele, die durch

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{1-pt}{1+pt}, & t \in \mathbb{T}, \\ f_1(t) &= \frac{t+p}{1+pt} - p, & t \in \mathbb{T}, \\ f_2(t) &= i \ln f_0(t), & t \in \mathbb{T}, \\ f_3(t) &= \exp(-f_0(t)) - \exp(-1), & t \in \mathbb{T}, \\ f_4(t) &= \exp(i \ln f_0(t)) - 1, & t \in \mathbb{T}, \\ f_5(t) &= \sqrt{1+pt} - 1, & t \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

mit dem Parameter $p \in [0, 1]$ gegeben sind. Abbildung 3.9 zeigt Real- und Imaginärteil der Testbeispiele für den Wert $p = 0.95$. Ist $0 \leq p < 1$, so sind diese Funktionen holomorph fortsetzbar in den Einheitskreis \mathbb{D} . Wenden wir den Hilbert-Operator H auf den Imaginärteil von f_k an, so bekommen wir nach Satz 2.16 gerade den Realteil von f_k . Damit haben wir eine direkte Vergleichsmöglichkeit. In Abbildung 3.10 ist nun der Logarithmus des Fehlers

$$\text{err} := \left\| u - \tilde{H}v \right\|_{L_2} \quad (3.34)$$

für $p = 0.95$, $j_0 = 8$ und variablen J zu sehen, wobei u den Real- und v den Imaginärteil der Testbeispiele bezeichnet. Der Logarithmus des Fehlers (3.34) verhält sich anfangs linear,


Abbildung 3.10: Logarithmus des Fehlers (3.34) abhängig von J

was den Interpolationsfehler auf dem gleichmäßigen Gitter nach Satz 2.7 widerspiegelt. Der Betrag des Anstiegs der Regressionsgeraden (dividiert durch $\log_{10} 2$) des linearen Anteils ist in Tabelle 3.4 aufgelistet. Für größere Werte von J ist dieser Fehler nahezu konstant, wenn wir in die Genauigkeit zur Berechnung der Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ nach Satz 3.8 gelangen.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$m = 1$	2.025	2.016	2.018	2.016	2.011
$m = 3$	4.262	4.253	4.278	4.256	3.934

Tabelle 3.4: Anstieg der Regressionsgeraden auf dem gleichmäßigen Gitter

Ein analoges Ergebnis bekommen wir bei der Auswertung des Hilbert-Operators H auf einem ungleichmäßigen Gitter, wenn wir das Gitter mit Hilfe des Threshold aus Satz 3.11 bilden. Anfangs haben wir den (linearen) Interpolationsfehler und später den konstanten Fehler bei der Berechnung der Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ beziehungsweise den Fehler beim Thresholding nach Satz 3.11. Das Resultat ist für $\varepsilon = 10^{-8}$ in Abbildung 3.11 dargestellt.

Nachfolgend betrachten wir den Fehler (3.34) für den nicht geänderten Algorithmus 5. Wir starten mit dem groben Gitter \mathcal{G}_{j_0} und konstruieren schrittweise das ungleichmäßige Gitter. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.12 zu sehen. Der Unterschied zur Abbildung 3.11 ist minimal. Dies läßt den Schluß zu, dass der Algorithmus 5 zumindest für unsere Testbeispiele sowohl für $m = 1$ als auch $m = 3$ das gewünschte Resultat liefert. Der Fall $m = 1$ wurde in Satz 3.15 für das modifizierte Verfahren explizit untersucht.

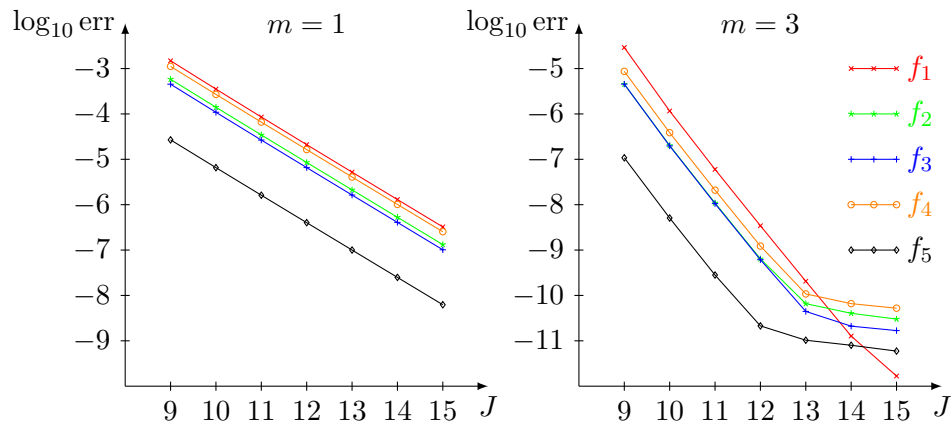


Abbildung 3.11: Logarithmus des Fehlers (3.34) auf einem ungleichmäßigen Gitter

Die Anzahl der Gitterpunkte des ungleichmäßigen Gitters relativ zu dem feinen Gitter \mathcal{F}_J gibt Tabelle 3.5 für einige Werte von m und \tilde{m} an. Es ist gut zu erkennen, dass bei Erhöhung von

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$m = 1, \tilde{m} = 3$	46.1%	100%	99.22%	100%	100%
$m = 1, \tilde{m} = 5$	46.38%	100%	99.25%	100%	100%
$m = 3, \tilde{m} = 3$	6.74%	14.25%	18.6%	16.88%	5.29%
$m = 3, \tilde{m} = 5$	6.78%	14.87%	18.73%	17.04%	5.32%

Tabelle 3.5: prozentualer Anteil der Gitterpunkte des ungleichmäßigen Gitters

\tilde{m} , was einem größeren Träger des Wavelets entspricht, der Anteil der Gitterpunkte wächst. Außerdem beobachtet man, dass das Gitter für $m = 1$ zum größten Teil noch vollbesetzt ist. Bei $m = 3$ stellt sich dagegen eine gute Lokalisierung der Funktion ein. Um dies zu verdeutlichen, zeigt Abbildung 3.13 die berechneten Gitter zu den einzelnen Testbeispielen jeweils für $m = 1$ und $m = 3$.

Der Aufwand zur Berechnung der Hilbert-Transformation wird zum größten Anteil durch die Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$ aus (3.20) bestimmt. Tabelle 3.6 gibt den Anteil der Einträge an, die von Null verschieden sind. Dabei ist $j_0 = 8$, $J = 15$ und $\varepsilon = 10^{-8}$ gewählt worden.

\tilde{m}	1	3	5	7
$m = 1$	28.63%	5.52%	3.05%	2.45%
$m = 3$	-	7.52%	3.98%	2.79%

Tabelle 3.6: prozentualer Anteil der von Null verschiedenen Einträge von $\tilde{\mathcal{H}}$

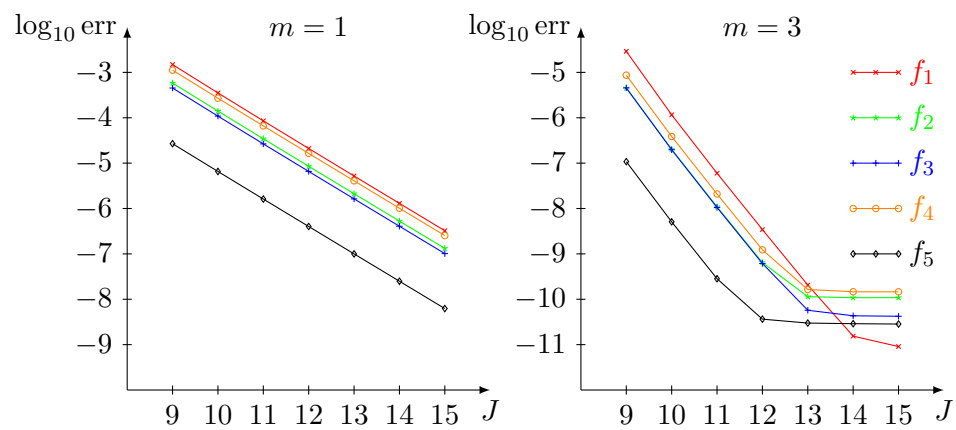


Abbildung 3.12: Logarithmus des Fehlers (3.34) für den Algorithmus 5

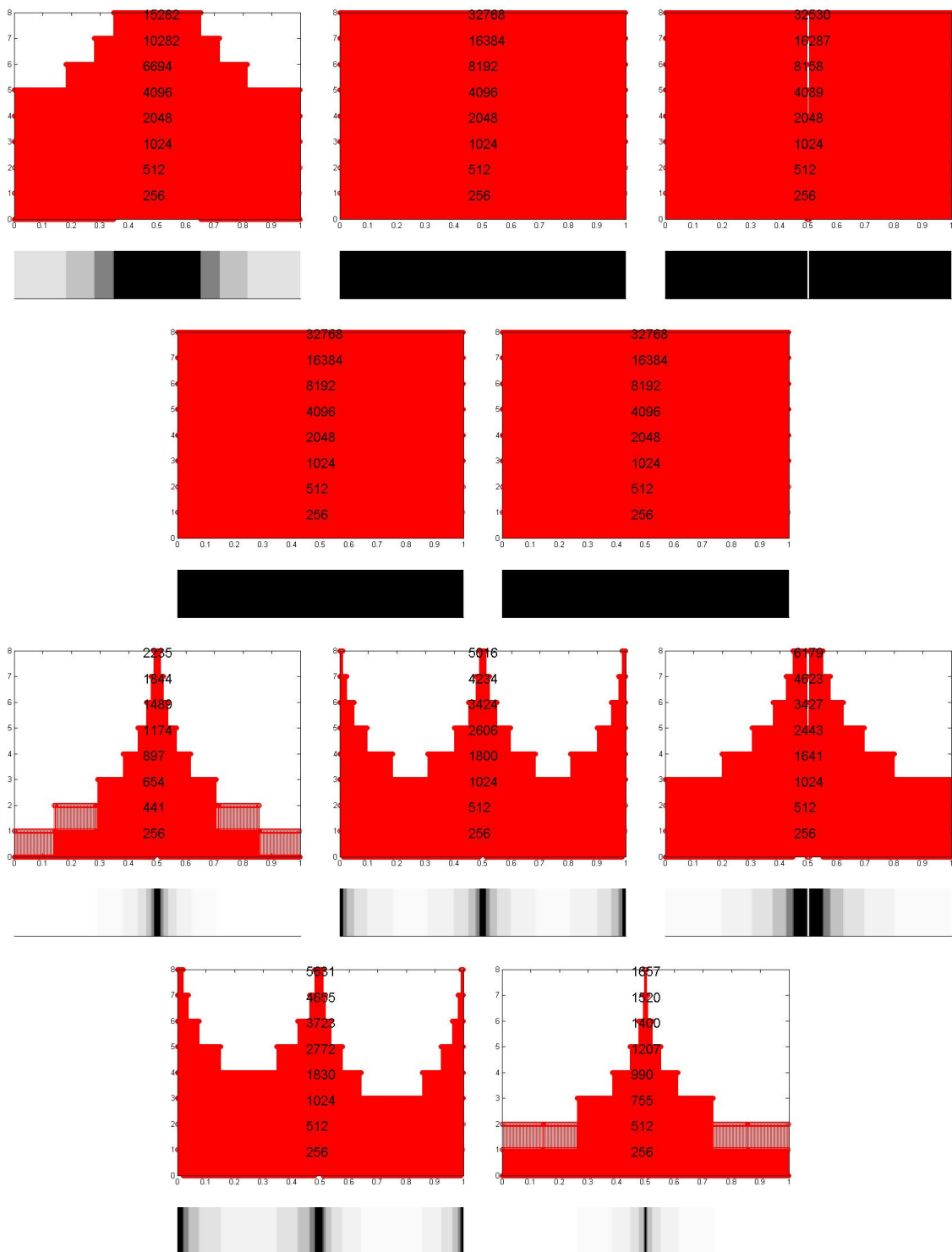


Abbildung 3.13: ungleichmäßiges Gitter der Testbeispiele für den Algorithmus 5 (oben $m = 1$ und unten $m = 3$)

4 Numerische Lösung nichtlinearer Randwertaufgaben

Kapitel 2.7 hat einen kleinen Überblick über Riemann-Hilbert Probleme gegeben. Ein Spezialfall ist die konforme Abbildung vom Einheitskreis \mathbb{D} auf ein beschränktes Gebiet G mit glattem Rand ∂G . Wegmann stellt in seiner Arbeit [46] eine Methode zur Bestimmung dieser Abbildung vor. Als ein Beispiel verwendet er die konforme Abbildung auf eine Ellipse. In Abbildung 4.1 sind die Werte der Randfunktion auf einem gleichmäßigen Gitter von \mathbb{D} mit 2^{12} Punkten dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass in der Umgebung der Punkte ± 4 nur

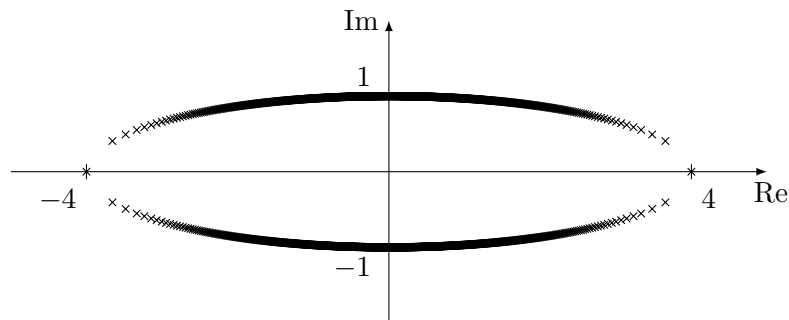


Abbildung 4.1: konforme Abbildung auf eine Ellipse

sehr wenige Werte vorhanden sind. Dagegen häufen sich um $\pm i$ sehr viele Funktionswerte an. Dieses Phänomen wird auch als *crowding* bezeichnet. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, in den Regionen, in denen sich nur wenige Werte befinden, mehrere Gitterpunkte zu platzieren und in den restlichen Regionen, das Gitter eventuell noch auszudünnen. Dies motiviert auch die Auswertung des Hilbert-Operators auf ungleichmäßigen Gittern, da dieser bei der Lösung der linearen Probleme benötigt wird.

Weiterhin besteht ein Problem bei der numerischen Auswertung des Verfahrens von Wegmann. Man erkennt, dass sich zu Beginn der Iteration eine quadratische Konvergenz einstellt. Ist das Problem aber schlecht konditioniert, dann beobachtet man im späteren Verlauf einen linearen Zuwachs des Fehlers, der die Konvergenz des Verfahrens zerstört. In der späteren Arbeit [47] von Wegmann modifiziert er das Verfahren und zeigt die Konvergenz, falls sich das Gebiet G nicht sehr vom Einheitskreis \mathbb{D} unterscheidet. Die oben beschriebenen Probleme treten aber weiterhin auf, wenn das Gebiet G zu sehr vom Einheitskreis \mathbb{D} abweicht.

In [43] beziehungsweise [44, Kapitel 7.1] ist das Verfahren von Wegmann auf Riemann-Hilbert Probleme übertragen worden. Wie zu erwarten treten auch hier die genannten Probleme auf. Ebenfalls in [44, Kapitel 7.2] ist basierend auf eine äquivalente Operatorgleichung ein

Newton-Verfahren entwickelt worden. Beide Methoden wollen wir näher vorstellen und einige Modifikationen durchführen.

Zu Beginn untersuchen wir aber einen speziellen Fall von Riemann-Hilbert Problemen, die sogenannten expliziten Riemann-Hilbert Probleme.

4.1 Explizite Riemann-Hilbert Probleme

Wir betrachten das Riemann-Hilbert Problem

$$\begin{aligned} w(t) &\in M_t, & \forall t \in \mathbb{T}, \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dabei sind die Zielkurven M_t durch

$$M_t := \{u + iv \in \mathbb{C} : v = f(t, u)\}$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir suchen also eine Funktion $w(t) = u(t) + iv(t)$, die Randfunktion einer in \mathbb{D} holomorphen Funktion ist, und die Bedingungen

$$\begin{aligned} v(t) &= f(t, u(t)), & t \in \mathbb{T}, \\ u(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

erfüllt. Dieses Problem bezeichnen wir als explizites Riemann-Hilbert Problem.

4.1.1 Lösbarkeit

Satz 2.29 beziehungsweise Satz 2.30 liefert die Existenz einer Lösung $w \in H_\infty \cap C$ unter starken Voraussetzungen an die Funktion f . In der Arbeit [42] ist ein Resultat unter schwächeren Bedingungen angegeben. Dabei wird gefordert, dass die Funktion f eine Hölder-stetige partielle Ableitung $\partial_u f(t, u)$ besitzt und die partielle Ableitung nach t beschränkt ist. Dann bekommen wir eine eindeutige Lösung, welche Hölder-stetig ist. Eine weitere Lockerung der Voraussetzungen befindet sich in [45], wo verlangt wird, dass die Funktion f die Bedingung

$$|f(t, u_1) - f(s, u_2)| \leq C(|t - s| + |u_1 - u_2|), \quad \forall t, s \in \mathbb{T}, u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

erfüllt. Wieder bekommen wir eine eindeutige Hölder-stetige Lösung. Weiterhin befindet sich in den Arbeiten [40, 41] ein Ergebnis unter schwächeren Bedingungen. Von der Funktion f wird gefordert, dass sie stetig ist und gleichmäßig stetig ist in der zweiten Variablen mit

$$\begin{aligned} |f(t, u)| &\leq A + B|u|, & \forall t \in \mathbb{T}, u \in \mathbb{R}, \\ |f(t, u_1) - f(t, u_2)| &\leq A + |u_1 - u_2|, & \forall t \in \mathbb{T}, u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir bekommen dann eine eindeutige Lösung im Raum $H_2(\mathbb{T})$. Dabei ist zu beachten, dass die Bedingung (4.1) nicht mehr für alle sondern nur noch für fast alle $t \in \mathbb{T}$ erfüllt ist. Der nachfolgende Satz gibt nun ein weiteres Ergebnis unter etwas schwächeren Voraussetzungen an.

Satz 4.1 Sei $0 \leq q < 1$ und $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} |f(t, u_1) - f(t, u_2)| &\leq q |u_1 - u_2|, & \forall t \in \mathbb{T}, \\ f(\cdot, u) &\in L_2(\mathbb{T}), & \forall u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben. Dann besitzt das explizite Riemann-Hilbert Problem (4.1) eine eindeutige Lösung in $H_2(\mathbb{T})$.

Beweis : Wir definieren den Operator $A : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ durch

$$Au(t) := H[f(\cdot, u(\cdot))](t). \quad (4.2)$$

Aus den Voraussetzungen an die Funktion f folgt

$$|f(t, u)| \leq q |u| + |f(t, 0)|.$$

Für $u \in L_2(\mathbb{T})$ bekommen wir mit der Bezeichnung $F(t) = f(t, u(t))$

$$\|F\|_{L_2} \leq \|q|u| + f(\cdot, 0)\|_{L_2} \leq q \|u\|_{L_2} + \|f(\cdot, 0)\|_{L_2}.$$

Mit Satz 2.16 bildet also der Operator A den Raum $L_2(\mathbb{T})$ in sich ab. Weiter ist nach Satz 2.16 das explizite Riemann-Hilbert Problem (4.1) wegen $u(0) = 0$ äquivalent zu

$$u(t) = Hv(t) = Au(t).$$

Also ist u Fixpunkt von A . Aus Satz 2.16 folgt

$$\begin{aligned} \|Au_1 - Au_2\|_{L_2}^2 &= \|H[f(\cdot, u_1) - f(\cdot, u_2)]\|_{L_2}^2 \leq \|f(\cdot, u_1) - f(\cdot, u_2)\|_{L_2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{T}} |f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))|^2 |dt| \\ &\leq q^2 \int_{\mathbb{T}} |u_1(t) - u_2(t)|^2 |dt| = q^2 \|u_1 - u_2\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Somit ist der Operator A kontrahierend und wir bekommen die Existenz und die Eindeutigkeit eines Fixpunktes von A . Weiterhin konvergiert die Folge

$$\begin{aligned} u_0 &\equiv 0, \\ u_{n+1} &= Au_n, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.3)$$

in $L_2(\mathbb{T})$ gegen den Realteil der Lösung des expliziten Riemann-Hilbert Problems (4.1). Der Imaginärteil ist dann durch $f(t, u(t))$ gegeben. #

Bemerkung: Die Iteration (4.3) wird der Ausgangspunkt für ein numerisches Verfahren zur Lösung expliziter Riemann-Hilbert Probleme sein.

Bemerkung: Bislang haben wir die Zusatzbedingung $u(0) = 0$ betrachtet. Allgemeiner können wir die Nebenbedingung $u(0) = u_0$, $u_0 \in \mathbb{R}$, untersuchen. Die Betrachtungen verlaufen analog wie oben beschrieben, indem wir den Operator A durch

$$\widehat{A}(t) := H[f(\cdot, u(\cdot))](t) + u_0$$

ersetzen.

4.1.2 Konvergenz des diskreten Verfahrens

Um die Konvergenz eines auf (4.3) basierenden diskreten Verfahrens zu untersuchen, stellen wir stärkere Forderungen an die Funktion f . Die Funktion f möge die Bedingungen

$$\begin{aligned} f &\in C^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R}), \\ |\partial_u f(t, u)| &\leq q < 1, \\ |\partial_t f(t, u)| &\leq C \end{aligned} \tag{4.4}$$

erfüllen. Unter diesen Voraussetzungen an die Funktion f bildet der Operator A , der in (4.2) definiert wird, sogar den Raum $W_2^1(\mathbb{T})$ in sich ab, siehe [1, Kapitel 9.4] oder [44, Kapitel 1.3]. Um den Operator A zu diskretisieren, betrachten wir für $n = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$, das gleichmäßige Gitter $t_k := e^{2\pi i \frac{k}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$, auf \mathbb{T} und definieren den trigonometrischen Interpolationsoperator $L_n : W_2^1(\mathbb{T}) \rightarrow W_2^1(\mathbb{T})$ durch

$$L_n g(t) = \sum_{k=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}} \widehat{g}_k t^k, \quad g \in W_2^1(\mathbb{T}), \tag{4.5}$$

wobei sich die Koeffizienten \widehat{g}_k aus der diskreten Fourier-Transformation der Funktionswerte $g(t_k)$, $k = 0, \dots, n-1$, ergeben. Eine mögliche Diskretisierung von A ist dann durch

$$A_n u(t) := H L_n[f(\cdot, u(\cdot))](t), \quad u \in W_2^1(\mathbb{T}), \tag{4.6}$$

gegeben. Für $u \in W_2^1(\mathbb{T})$ werten wir also die Funktion $F(t) := f(t, u(t))$ auf dem Gitter (t_k) aus und interpolieren die Funktionswerte durch ein trigonometrisches Polynom. Anschließend wenden wir den Hilbert-Operator an und erhalten nach (2.27) wieder ein trigonometrisches Polynom. Im Folgenden wollen wir begründen, dass sich die Iteration

$$\begin{aligned} u_0 &\equiv 0, \\ u_{k+1} &= A_n u_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{4.7}$$

dem Fixpunkt von A für hinreichend großes n annähert. Dazu zeigen wir die Existenz einer Kugel $B := \{u \in W_2^1(\mathbb{T}) : \|u\|_{W_2^1} \leq R\}$, die invariant unter A_n ist. In diesem Zusammenhang untersuchen wir $\|A_n u\|_{W_2^1}$ für $u \in B$ und erhalten nach Satz 2.16 und der Bezeichnung $F(t) = f(t, u(t))$

$$\|A_n u\|_{W_2^1} = \|HL_n F\|_{W_2^1} \leq \|H\| \|L_n\| \|F\|_{W_2^1}.$$

Mit den Voraussetzungen an die Funktion f bekommen wir

$$\begin{aligned} \|F\|_{W_2^1}^2 &= \|F\|_{L_2}^2 + \|DF\|_{L_2}^2 \\ &\leq (\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + \|f(\cdot, u) - f(\cdot, 0)\|_{L_2})^2 + \|\partial_t f(\cdot, u)\|^2 + \|\partial_u f(\cdot, u) Du\|_{L_2}^2 \\ &\leq (\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + q\|u\|_{L_2})^2 + (\|\partial_t f(\cdot, u)\|_{L_2} + q\|Du\|_{L_2})^2 \\ &\leq (\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + q\|u\|_{L_2})^2 + \left(\sqrt{2\pi}C + q\|Du\|_{L_2}\right)^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Damit gelangen wir für $u \in B$ mittels Satz 2.16 zu

$$\begin{aligned} \|A_n u\|_{W_2^1} &\leq \|H\| \|L_n\| \sqrt{(\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + q\|u\|_{L_2})^2 + \left(\sqrt{2\pi}C + q\|Du\|_{L_2}\right)^2} \\ &\leq \|L_n\| \left(\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + \sqrt{2\pi}C + q\|u\|_{W_2^1}\right) \\ &\leq \|L_n\| \left(\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + \sqrt{2\pi}C + qR\right) = \|L_n\| \left(\tilde{C} + qR\right) \end{aligned}$$

mit $\tilde{C} := \|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + \sqrt{2\pi}C$. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Norm des Operators als Abbildung von $W_2^1(\mathbb{T})$ nach $W_2^1(\mathbb{T})$. Ist $\|L_n\| q < 1$, so folgt für $R > \frac{\|L_n\|\tilde{C}}{1-\|L_n\|q}$

$$\|A_n u\|_{W_2^1} \leq R.$$

Also bildet der Operator A_n die Menge B in sich ab. Ein analoges Ergebnis erhalten wir für den Operator A selbst. Das folgende Lemma zeigt nun, dass die Iterierten von (4.3) und (4.7) nicht weit auseinander laufen.

Lemma 4.2 *Sei A der Operator aus (4.2) und A_n durch (4.6) definiert. Weiterhin erfülle f die Voraussetzungen (4.4). Weiter betrachten wir die beiden Folgen*

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= Au_k(t), \\ \tilde{u}_{k+1}(t) &= A_n \tilde{u}_k(t), \end{aligned}$$

mit den Startwerten $u_0(t) = \tilde{u}_0(t) \equiv 0$. Dann gilt für $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes n

$$\|u_k - \tilde{u}_k\|_{L_2} \leq \delta := \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

Beweis : Wir benötigen für $u \in B$ die Abschätzung

$$\|Au - A_n u\|_{L_2} \leq \varepsilon.$$

Dazu untersuchen wir mit der Schreibweise $F(t) = f(t, u(t))$

$$\|Au - A_n u\|_{L_2} = \|HF - H L_n F\|_{L_2} \leq \|H\| \|I - L_n\| \|F\|_{W_2^1},$$

wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm $W_2^1(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ ist. Der Fehler bei der trigonometrischen Interpolation beträgt

$$\|g - L_n g\|_{L_2} \leq \sqrt{4 + \pi^2 n^{-1}} \|g\|_{W_2^1}, \quad g \in W_2^1(\mathbb{T}).$$

Somit folgt nach Satz 2.16 und (4.8) für $u \in B$

$$\begin{aligned} \|Au - A_n u\|_{L_2} &\leq \sqrt{4 + \pi^2 n^{-1}} \left(\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + \sqrt{2\pi}C + q \|u\|_{W_2^1} \right) \\ &\leq \sqrt{4 + \pi^2 n^{-1}} \left(\|f(\cdot, 0)\|_{L_2} + \sqrt{2\pi}C + qR \right). \end{aligned}$$

Für n hinreichend groß gelangen wir schließlich zu

$$\|Au - A_n u\|_{L_2} \leq \varepsilon.$$

Die Aussage des Lemmas folgt nun per Induktion und

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\|_{L_2} &= \|Au_k - A_n \tilde{u}_k\|_{L_2} \leq \|Au_k - A \tilde{u}_k\|_{L_2} + \|A \tilde{u}_k - A_n \tilde{u}_k\|_{L_2} \\ &\leq q \|u_k - \tilde{u}_k\|_{L_2} + \varepsilon \leq q\delta + \varepsilon \\ &= \delta. \end{aligned}$$

#

Als Folgerung erhalten wir

Satz 4.3 *Sei u^* der Fixpunkt des Operators A gegeben durch (4.2) und die Funktion f erfülle die Voraussetzungen (4.4). Für k hinreichend groß gilt dann mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.2*

$$\|\tilde{u}_k - u^*\|_{L_2} \leq \frac{2\varepsilon}{1-q}.$$

Beweis : Wir wählen k so groß, dass

$$\|u_k - u^*\|_{L_2} \leq \delta$$

ist. Mit Lemma 4.2 haben wir

$$\|\tilde{u}_k - u^*\|_{L_2} \leq \|\tilde{u}_k - u_k\|_{L_2} + \|u_k - u^*\|_{L_2} \leq 2\delta = \frac{2\varepsilon}{1-q}.$$

#

Zum Abschluß stellen wir eine weitere Möglichkeit zur Diskretisierung des Operators A vor. Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein. Mit \tilde{L}_n bezeichnen wir den Interpolationsoperator, der einer Funktion $g \in W_2^1(\mathbb{T})$ die Spline-Interpolation auf dem gleichmäßigen Gitter (t_k) zuweist. Die Zuordnung der Spline-Interpolation in die Wavelet-Basis (3.14) nennen wir W . Weiterhin benutzen wir den Operator \tilde{H} aus (3.19). Damit definieren wir den Operator \tilde{A}_n durch

$$\tilde{A}_n u(t) := \tilde{L}_n \tilde{H} W \tilde{L}_n [f(\cdot, u(\cdot))](t), \quad u \in W_2^1(\mathbb{T}). \quad (4.9)$$

Die entscheidenden Abschätzungen, die wir treffen müssen, sind

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_n u\|_{W_2^1} &\leq C_1 (C_2 + q \|u\|_{W_2^1}), \\ \|Au - \tilde{A}_n u\|_{L_2} &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

für $u \in B$ und hinreichend großes n . Mit (4.8) und der Bezeichnung $F(t) = f(t, u(t))$ bekommen wir für die erste Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_n u\|_{W_2^1} &\leq \|\tilde{L}_n\| \left(\|\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}}\| + \|\mathbf{H}\| \right) \|\mathbf{W}\| \|\tilde{L}_n\| \|F\|_{W_2^1} \\ &\leq \|\tilde{L}_n\|^2 \left(\|\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}}\| + 1 \right) \|\mathbf{W}\| \left(\tilde{C} + q \|u\|_{W_2^1} \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $\|\cdot\|$ die Operatornorm $W_2^1(\mathbb{T}) \rightarrow W_2^1(\mathbb{T})$. Sowohl \tilde{L}_n als auch W sind beschränkte Operatoren auf $W_2^1(\mathbb{T})$. Der Operator W ist sogar eine Isometrie auf $W_2^1(\mathbb{T})$ und die Norm von \tilde{L}_n läßt sich mithilfe von Satz 2.7 bestimmen. Der Ausdruck $\|\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}}\|$ ist durch Satz 3.8 gegeben. Damit haben wir die erste Abschätzung erhalten. Für die zweite Abschätzung haben wir für $u \in B$ und (4.8)

$$\begin{aligned} \|Au - \tilde{A}_n u\|_{L_2} &= \left\| \left(\mathbf{H} - \tilde{L}_n \tilde{\mathbf{H}} W \tilde{L}_n \right) F \right\|_{L_2} \\ &\leq \left(\|\mathbf{H} - \tilde{L}_n \mathbf{H}\| + \|\tilde{L}_n \mathbf{H} - \tilde{L}_n \tilde{\mathbf{H}}\| + \|\tilde{L}_n \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{L}_n \tilde{\mathbf{H}} W \tilde{L}_n\| \right) \|F\|_{W_2^1} \\ &\leq \left(\|\mathbf{H} - \tilde{L}_n \mathbf{H}\| + \|\tilde{L}_n \mathbf{H} - \tilde{L}_n \tilde{\mathbf{H}}\| + \|\tilde{L}_n \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{L}_n \tilde{\mathbf{H}} W \tilde{L}_n\| \right) (\tilde{C} + qR). \end{aligned}$$

mit $\|\cdot\|$ als Operatornorm $W_2^1(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$. Nach Satz 2.7 und 2.16 ist

$$\|\mathbf{H} - \tilde{L}_n \mathbf{H}\| \leq C_1 n^{-1}.$$

Mittels Satz 3.8 und der Beschränktheit von \tilde{L}_n können wir den zweiten Term $\|\tilde{L}_n H - \tilde{L}_n \tilde{H}\|$ beliebig klein machen. Für den letzten Ausdruck bekommen wir mithilfe von Satz 2.7 und der Beschränktheit von \tilde{H} und \tilde{L}_n

$$\|\tilde{L}_n \tilde{H} - \tilde{L}_n \tilde{H} W \tilde{L}_n\| \leq \|\tilde{L}_n\| \|\tilde{H}\| \|I - W \tilde{L}_n\| \leq C_3 n^{-1}.$$

Insgesamt erreichen wir für hinreichend großes n , dass

$$\|Au - \tilde{A}_n u\|_{L_2} \leq \varepsilon$$

für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gilt. Folglich erhalten wir analog zu Satz 4.3

Satz 4.4 *Der Operator A sei durch (4.2) gegeben, wobei die Funktion f die Voraussetzungen (4.4) erfüllt. Weiterhin sei u^* der Fixpunkt von A . Weiter betrachten wir die Iteration*

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \tilde{A}_n u_k, & k &= 0, 1, \dots, \\ u_0 &\equiv 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dann gilt für $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes k und n die Abschätzung

$$\|u_k - u^*\|_{L_2} \leq \frac{2\varepsilon}{1-q}.$$

4.1.3 Numerische Ergebnisse

Wir starten mit dem Beispiel

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \frac{z+a}{1+az}, \\ f(t, u) &= p \log(|u|+1) - p \log(|\operatorname{Re} f_0(t)|+1) + \operatorname{Im} f_0(t) \end{aligned}$$

für $p \in [0, 1)$ und $a \in [0, 1)$ und betrachten das explizite Riemann-Hilbert Problem (4.1) unter der Zusatzbedingung $u(0) = a$. Die exakte Lösung lautet $w^*(t) = u^*(t) + iv^*(t) = f_0(t)$. Weiterhin erfüllt die Funktion f die Voraussetzungen (4.4) mit $q = p$. Zur numerischen Lösung dieses Problems benutzen wir die beiden Iterationen (4.7) und (4.10). Die Anzahl der Gitterpunkte beträgt dabei $n = 2^{15}$ Punkte. Um eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit zu treffen, messen wir die Norm des Zuwachses

$$\|u_{k+1} - u_k\|_2^2 := \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} |u_{k+1}(t_l) - u_k(t_l)|^2. \tag{4.11}$$

Abbildung 4.2 zeigt den Zuwachs (4.11) für die Werte $p = 0.5$ und $a = 0.95$ sowohl für den Operator A_n als auch \tilde{A}_n . Zu erkennen ist sehr gut die lineare Konvergenz beider Ver-

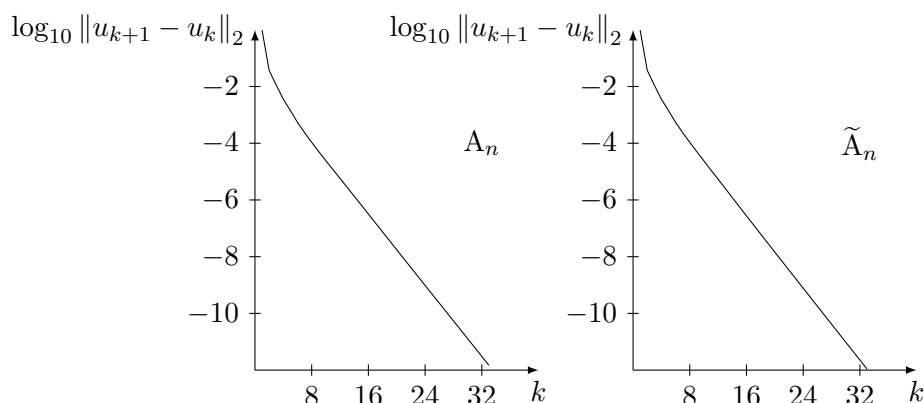


Abbildung 4.2: Zuwachs (4.11) für die Iteration (4.7) (links) und (4.10) (rechts)

fahren. Der Grund hierfür ist die lineare Konvergenz der Fixpunktiteration im Banachschen Fixpunktsatz, der zum Beweis von Satz 4.1 benutzt wird. Dies überträgt sich auch auf die beiden Diskretisierungen (4.6) und (4.9). Aus diesen Werten läßt sich die Kontraktionskonstante bestimmen, indem wir eine lineare Regression durchführen und den Anstieg der Geraden zur Potenz 10 nehmen. Tabelle 4.1 gibt die berechneten Werte als auch den Fehler (4.11) der

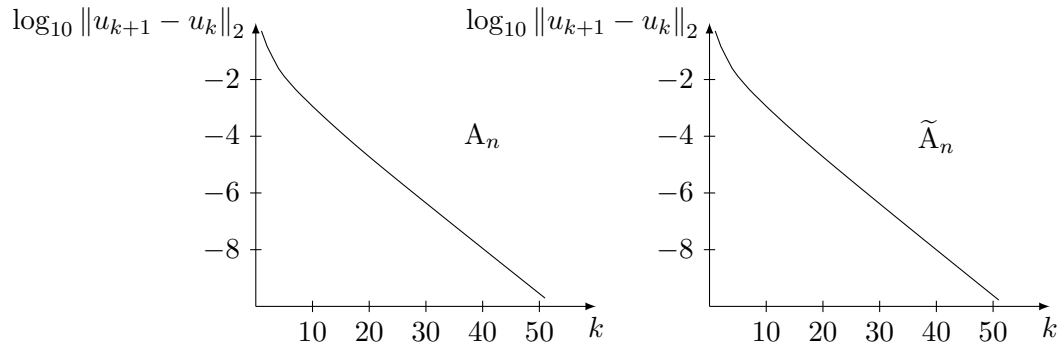
	Fehler $\ u_k - u^*\ _2$	geschätzte Kontraktionskonstante
Iteration (4.7)	$6.4581 \cdot 10^{-13}$	0.4828
Iteration (4.10)	$8.9811 \cdot 10^{-13}$	0.4770

Tabelle 4.1: Fehler der Iterationen (4.7) und (4.10) sowie Kontraktionskonstante

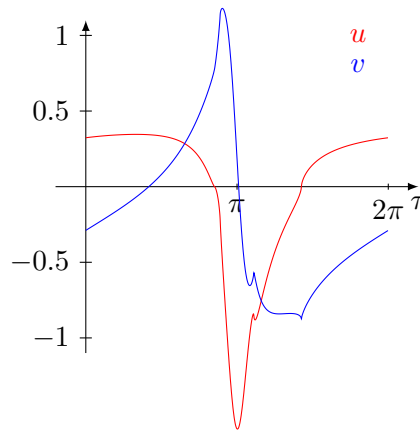
berechneten Lösung zur exakten Lösung an.

Als nächstes untersuchen wir den Fall $p = a = 0.7$ unter der Zusatzbedingung $u(0) = 0$. Die exakte Lösung ist in diesem Fall nicht bekannt. In Abbildung 4.3 ist wieder der Zuwachs (4.11) für die beiden Iterationen (4.7) und (4.10) dargestellt. Die Konvergenz beider Iterationen ist wieder linear. Die berechneten Werte für die Kontraktionskonstanten sind 0.6820 für A_n beziehungsweise 0.6793 für \tilde{A}_n . Die Lösung ist in Abbildung 4.4 zu sehen.

Abschließend modifizieren wir den Operator \tilde{A}_n . Wir starten auf einem gleichmäßigen Gitter mit $n_0 = 2^{j_0}$ Gitterpunkte. Zur Bestimmung des interpolierenden Splines benutzen wir die Algorithmen 3 und 4. Die Auswertung des Hilbert-Operators \tilde{H} erfolgt unter Zuhilfenahme von adaptiven Strategien wie sie im Algorithmus 5 beschrieben sind. Der Zuwachs (4.11), wobei wir nur die zum aktuellen Gitter gehörenden Punkte verwenden, ist für $j_0 = 8$, $m = 3$


 Abbildung 4.3: Zuwachs (4.11) für den Fall $a = p = 0.7$

und $\tilde{m} = 5$ in Abbildung 4.5 dargestellt. Ebenfalls wird das resultierende Gitter gezeigt. Der Verlauf des Zuwachses in Abbildung 4.3 und 4.5 ist nahezu identisch. Ein Vergleich der Lösungen ergibt, dass die Norm (4.11) der Differenz der beiden Lösungen $2.47 \cdot 10^{-13}$ beträgt, wobei wir nur die Gitterpunkte hinzuziehen, die zum Gitter gehören. Das bedeutet, die adaptiven Strategien zur Anpassung des Gitters führen in diesem Beispiel zu vernünftigen Ergebnissen.


 Abbildung 4.4: Lösung des expliziten Riemann-Hilbert Problems für $p = a = 0.7$

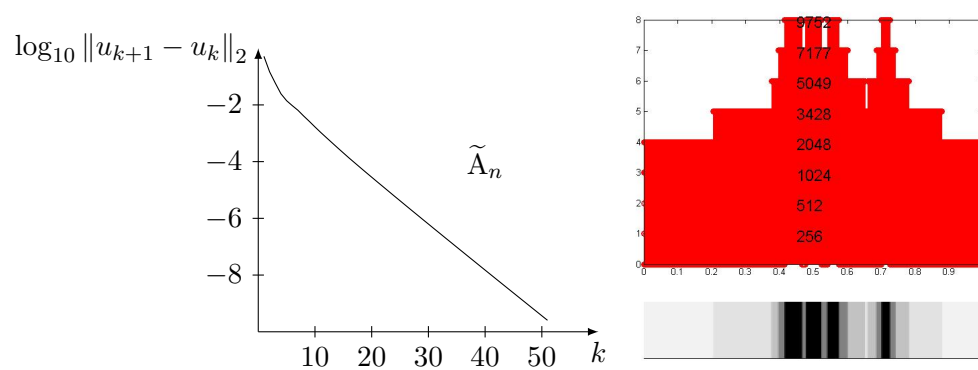


Abbildung 4.5: Zuwachs (4.11) für den modifizierten Operator \tilde{A}_n und $p = a = 0.7$

4.2 Ein geometrisch motiviertes Newton-Verfahren

In der Arbeit [48] von Wegmann ist eine Methode zur Berechnung der konformen Abbildung vom Einheitskreis \mathbb{D} auf ein beschränktes Gebiet G vorgestellt worden. Dieses Verfahren wird in [43] auf Riemann-Hilbert Probleme übertragen. Nachfolgend wird das Verfahren näher vorgestellt und im Anschluß modifiziert, so dass die numerische Umsetzung ein stabileres Konvergenzverhalten zeigt. Zum Abschluß werden einige numerische Ergebnisse präsentiert.

4.2.1 Verfahren

Wir betrachten das Riemann-Hilbert Problem

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} w &\subseteq M, \\ w(1) &= W, \end{aligned} \tag{4.12}$$

wobei die Zielmannigfaltigkeit M durch

$$M = \{(t, \mu(t, s)) \in \mathbb{T} \times \mathbb{C} : t \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{R}\}$$

mit der Funktion $\mu : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $W \in M_1$ gegeben ist. Die Zielmannigfaltigkeit gehört zur Klasse \mathcal{A} , falls die Funktion μ in s periodisch mit Periode 2π ist. Weiterhin soll M zur Klasse \mathcal{R} gehören und wir suchen eine Lösung von (4.12) mit $\operatorname{wind}_M w = 0$. Der Fall $\operatorname{wind}_M w = n > 0$ kann im Anschluß durch einfache Transformationen analog behandelt werden. Ist $M \in \mathcal{B}$, so setzen wir $\operatorname{ind} M = 0$ voraus. Dies ist ebenfalls keine Einschränkung, da der Fall $\operatorname{ind} M > 0$ durch geeignete Modifikationen auf den Fall $\operatorname{ind} M = 0$ zurückgeführt werden kann. Die Funktion μ möge die Bedingungen (A1) – (A3) beziehungsweise (B1) – (B4) aus Kapitel 2.7 erfüllen. Außerdem sei

$$\operatorname{wind} D_s \mu(\cdot, 0) = 0.$$

Unter all diesen Voraussetzungen besitzt das Problem (4.12) stets eine eindeutige Lösung in $H_\infty \cap C$, die wir im weiteren mit w^* bezeichnen werden. Weiterhin folgt aus den Voraussetzungen an die Funktion μ die Existenz einer stetigen Funktion $s^* : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $w^*(t) = \mu(t, s^*(t))$ für $t \in \mathbb{T}$.

Das Verfahren zur Lösung des Riemann-Hilbert Problems (4.12) basiert auf eine geometrische Linearisierung der Mannigfaltigkeit M . Wir starten mit einer Funktion $s_j : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die Bedingung

$$\mu(1, s_j(1)) = W$$

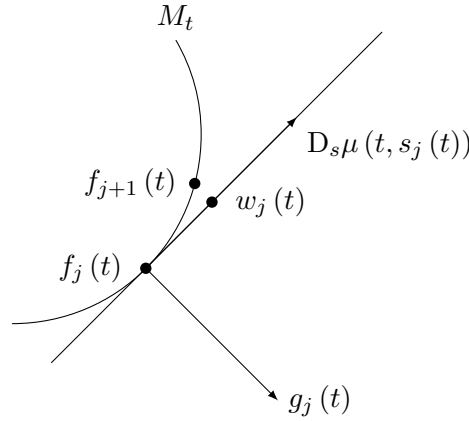


Abbildung 4.6: Schema zur Lösung des Riemann-Hilbert Problems (4.12)

erfüllt ist, und definieren $f_j(t) = \mu(t, s_j(t))$, $t \in \mathbb{T}$. Es gilt also $\text{tr } f_j \subseteq M$. Anschließend lösen wir das lineare Riemann-Hilbert Problem

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\overline{g_j(t)} w(t) \right) &= c_j(t), \\ w(1) &= W \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} g_j(t) &= -i D_s \mu(t, s_j(t)), \quad t \in \mathbb{T}, \\ c_j(t) &= \text{Re} \left(\overline{g_j(t)} f_j(t) \right), \quad t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Die Lösung bezeichnen wir mit $w_j(t)$. Die Funktion w_j läßt sich also holomorph in den Einheitskreis \mathbb{D} fortsetzen. Zum Schluß projizieren wir die Werte $w_j(t)$, $t \in \mathbb{T}$, auf die Kurven M_t , indem wir

$$\begin{aligned} s_{j+1}(t) &= s_j(t) + \frac{w_j(t) - f_j(t)}{i g_j(t)}, \quad t \in \mathbb{T}, \\ f_{j+1}(t) &= \mu(t, s_{j+1}(t)), \quad t \in \mathbb{T}, \end{aligned}$$

setzen. Abbildung 4.6 skizziert diese Vorgehensweise. Diese Prozedur wiederholen wir beginnend mit dem Lösen des linearen Riemann-Hilbert Problems (4.13). Dadurch erhalten wir die beiden Folgen (f_j) und (w_j) , wobei die Funktionen f_j die Randbedingung $\text{tr } f_j \subseteq M$ und die Nebenbedingung $f_j(1) = W$ erfüllen und die Funktionen w_j Randfunktionen in \mathbb{D} holomorpher Funktionen sind. Das so entstandene Verfahren bezeichnen wir mit *ONM* für **ordinary Newton method**. Ist die Startnäherung s_0 nahe an der exakten Lösung s^* , so ist in [44, Satz 7.1.4] unter der Bedingung $\mu \in C^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ gezeigt worden, dass die beiden Folgen (f_j) und (w_j) gegen den gemeinsamen Grenzwert w^* konvergieren.

4.2.2 Abgeändertes Verfahren

Die numerische Umsetzung des im Kapitel 4.2.1 beschriebenen Verfahrens, beispielsweise auf einem gleichmäßigen Gitter, erfordert eine diskrete Version des Hilbert-Operators, da er bei der Lösung der linearen Riemann-Hilbert Probleme (4.13) Anwendung findet. Dieser ist zum Beispiel durch den Operator HL_n gegeben, wobei L_n der trigonometrische Interpolationsoperator aus (4.5) ist. Die Konvergenz dieser Methode ist im Allgemeinen nicht gesichert. Abbildung 4.7 zeigt den Zuwachs (4.11) für die Funktion $f_{j+1} - f_j$ bei der Bestimmung der konformen Abbildung von \mathbb{D} auf eine Ellipse mit Achsenverhältnis 1 zu 3. Zu erkennen ist

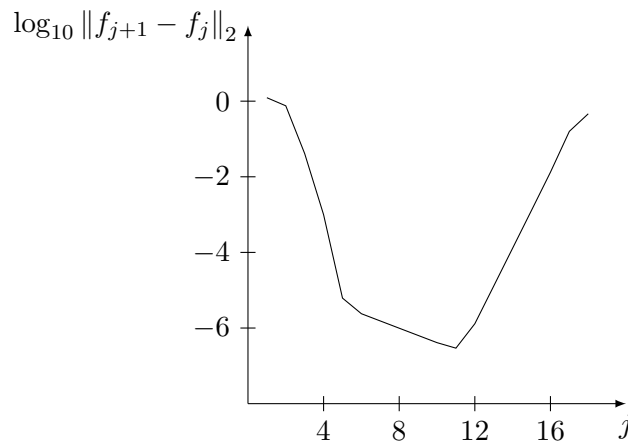


Abbildung 4.7: Zuwachs $\|f_{j+1} - f_j\|_2$ bei der konformen Abbildung auf eine Ellipse

sehr gut die Anfangs quadratische Konvergenz, die anschließende lineare Konvergenz und zum Schluß der lineare Anstieg des Zuwachses. Gründe hierfür sind zum einen Rundungsfehler und starke Oszillationen, die während der Iteration auftreten. Auch die explizite Darstellung der Lösung des linearen Riemann-Hilbert Problems aus Satz 2.21 ist problematisch, da wir die Exponentialfunktion und das Produkt zweier Funktionen bilden müssen. Angenommen, die Funktionen w_1 und w_2 gehören zu dem Raum

$$\mathbb{P}_n := \left\{ p(t) = \sum_{k=0}^n p_k t^k : p_k \in \mathbb{C}, k = 0, \dots, n \right\}$$

der diskreten analytischen Funktionen. Sie sind also Randfunktionen holomorpher Funktionen auf einem gleichmäßigen Gitter mit $2n$ Punkten und die negativen Fourier-Koeffizienten von w_1 beziehungsweise w_2 verschwinden. Dann gilt im Allgemeinen, dass $\exp w_1$ und $w_1 \cdot w_2$ nicht mehr zu \mathbb{P}_n gehören und damit unsere durch die Lösungsdarstellung gefundene Lösung nicht länger Randfunktion einer holomorphen Funktion ist. Aus diesen Gründen wollen wir zum

einen eine Modifikation des in Kapitel 4.2.1 beschriebenen Verfahrens vorstellen, zum anderen eine alternative Möglichkeit angeben, um das lineare Riemann-Hilbert Problem (4.13) zu lösen.

Wir beginnen mit einer Abwandlung des Verfahrens im Kapitel 4.2.1. Bislang ist das Symbol des linearen Riemann-Hilbert Problems (4.13) der aktuellen Lösung f_j angepaßt worden. Wir halten das Symbol nun aber fest und definieren $g(t) := -iD_s\mu(t, s^*(t))$. Anstelle von (4.13) lösen wir jetzt das lineare Riemann-Hilbert Problem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\overline{g(t)} w(t) \right) &= \tilde{c}_j(t), \\ w(1) &= W \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit der Funktion $\tilde{c}_j(t) = \operatorname{Re} \left(\overline{g(t)} f_j(t) \right)$. Die Lösung dieses Problems bezeichnen wir mit \tilde{w}_j . Die aktualisierte Lösung lautet dann

$$s_{j+1}(t) = s_j(t) + \frac{\tilde{w}_j(t) - f_j(t)}{ig(t)}, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (4.15)$$

Der folgende Satz zeigt die lineare Konvergenz des analytischen Verfahrens.

Satz 4.5 *Sei $\mu \in C^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ und $0 < q < 1$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass mit den obigen Bezeichnungen für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\|s_0 - s^*\|_{W_2^1} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|s_{j+1} - s^*\|_{W_2^1} \leq q \|s_j - s^*\|_{W_2^1}.$$

Beweis : Wir folgen dem Beweis in [44, Kapitel 7.1.4] für die Konvergenz des unveränderten Verfahrens. Als erstes bekommen wir analog zu Lemma 7.1.5 in [44] die Abschätzung

$$\|\tilde{w}_j - f_j\|_{W_2^1} \leq C_1 \|f_j - \tilde{w}_{j-1}\|_{W_2^1} \quad (4.16)$$

für $C_1 > 0$. Aus (4.15) folgt die Darstellung

$$\tilde{w}_j(t) - f_j(t) = ig(t) (s_{j+1}(t) - s_j(t))$$

und damit

$$f_{j+1}(t) - \tilde{w}_j(t) = \mu(t, s_{j+1}(t)) - \mu(t, s_j(t)) - ig(t) (s_{j+1}(t) - s_j(t)).$$

Mit Lemma 1.3.1 aus [44], der Taylorschen Formel und der Definition von g gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \|f_{j+1} - \tilde{w}_j\|_{W_2^1} &= \|\mu(\cdot, s_{j+1}) - \mu(\cdot, s_j) - ig(s_{j+1} - s_j)\|_{W_2^1} \\ &\leq C_2 \sup_s \|D_s\mu(\cdot, s) - D_s\mu(\cdot, s^*)\|_{W_2^1} \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1}. \end{aligned}$$

Dabei bilden wir das Supremum über eine Kugel um s^* mit Radius δ , welche die beiden Funktionen s_j und s_{j+1} enthalten soll. Aus den Voraussetzungen an die Funktion μ folgt die Stetigkeit des Operators

$$s \mapsto D_s \mu(\cdot, s).$$

Ist $0 < r < 1$, so erhalten wir für hinreichend kleines δ die Abschätzung

$$\|f_{j+1} - \tilde{w}_j\|_{W_2^1} \leq r \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1}. \quad (4.17)$$

Für $\|s_{j+1} - s^*\|_{W_2^1} < \delta$ und $\|s_j - s^*\|_{W_2^1} < \delta$ haben wir mittels (4.15), (4.16) und (4.17)

$$\begin{aligned} \|s_{j+2} - s_{j+1}\|_{W_2^1} &\leq C_3 \|\tilde{w}_{j+1} - f_{j+1}\|_{W_2^1} \leq C_3 C_1 \|f_{j+1} - \tilde{w}_j\|_{W_2^1} \\ &\leq C_3 C_1 r \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1}. \end{aligned}$$

Indem wir δ eventuell verkleinern, erreichen wir

$$\|s_{j+2} - s_{j+1}\|_{W_2^1} \leq \tilde{r} \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1} \quad (4.18)$$

mit $0 \leq \tilde{r} < \frac{1}{2}$. Weiterhin ist nach (4.15)

$$\|s_1 - s_0\|_{W_2^1} \leq C_3 \|w_0 - f_0\|_{W_2^1} \leq C_3 \left(\|w_0 - w^*\|_{W_2^1} + \|w^* - f_0\|_{W_2^1} \right).$$

Mit Lemma 1.7.5 und 1.8.2 aus [44] haben wir weiter

$$\begin{aligned} \|s_1 - s_0\|_{W_2^1} &\leq C_3 \left(\tilde{C} \|w^* - f_0\|_{W_2^1} + \|w^* - f_0\|_{W_2^1} \right) \\ &= C_3 \left(\tilde{C} + 1 \right) \|\mu(\cdot, s^*) - \mu(\cdot, s_0)\|_{W_2^1} \\ &\leq \underbrace{C_3 \left(\tilde{C} + 1 \right) \tilde{C}}_{=: C_4} \|s^* - s_0\|_{W_2^1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Wählen wir nun $\varepsilon < \delta \frac{1-\tilde{r}}{1-\tilde{r}+C_4}$, so bekommen wir durch wiederholte Anwendung von (4.18) und (4.19) für alle $j \in \mathbb{N}_0$

$$\|s_j - s^*\|_{W_2^1} < \delta \quad \text{und} \quad \|s_{j+2} - s_{j+1}\|_{W_2^1} \leq \tilde{r} \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1}.$$

Folglich konvergiert die Folge (s_j) gegen einen Grenzwert s_0^* . Nach (4.17) besitzen die beiden Folgen (f_j) und (\tilde{w}_j) den gleichen Grenzwert $w_0^*(t) = \mu(t, s_0^*(t))$. Die Funktion w_0^* erfüllt also die Bedingung (4.12) und ist holomorph fortsetzbar auf \mathbb{D} . Also stimmt w_0^* mit der eindeutigen Lösung w^* überein. Da s^* stetig ist und wir $s^*(1) = s_j(1) = s_0^*(1)$ haben, erhalten wir $s_0^* = s^*$. Die Abschätzung für $s_{j+1} - s^*$ folgt aus

$$\begin{aligned} \|s_{j+1} - s^*\|_{W_2^1} &\leq \|s_{j+1} - s_{j+2}\|_{W_2^1} + \|s_{j+2} - s_{j+3}\|_{W_2^1} + \dots \\ &\leq (\tilde{r} + \tilde{r}^2 + \dots) \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1} = \frac{\tilde{r}}{1-\tilde{r}} \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|s_j - s^*\|_{W_2^1} &\geq \|s_{j+1} - s_j\|_{W_2^1} - \|s_{j+1} - s^*\|_{W_2^1} \geq \left(\frac{1 - \tilde{r}}{\tilde{r}} - 1\right) \|s_{j+1} - s^*\|_{W_2^1} \\ &= \frac{1 - 2\tilde{r}}{\tilde{r}} \|s_{j+1} - s^*\|_{W_2^1} \geq \frac{1}{q} \|s_{j+1} - s^*\|_{W_2^1},\end{aligned}$$

falls $\tilde{r} \leq \frac{q}{1+2q}$.

#

Bemerkung: Im Allgemeinen ist die Funktion $g(t) = \mu(t, s^*(t))$, $t \in \mathbb{T}$, nicht bekannt, da die exakte Lösung w^* nicht gegeben ist. Aus diesem Grund ersetzen wir die Funktion g durch

$$g_0(t) = -iD_s \mu(t, s_0(t)) \quad (4.20)$$

mit der Startnäherung s_0 . Den so entstandenen Algorithmus nennen wir *MNM* für **m**odified **N**ewton **m**ethod. Numerische Experimente zeigen, dass auch dieses Verfahren konvergiert, solange die Startnäherung nur nahe an der exakten Lösung liegt. Dies kann durch Kombination mit einer Homotopiemethode erreicht werden.

Als nächstes stellen wir eine weitere Möglichkeit zur Lösung des linearen Riemann-Hilbert Problems (4.13) neben der expliziten Lösungsdarstellung vor. Dazu betrachten wir das allgemeine Riemann-Hilbert Problem (2.35) unter der Nebenbedingung $w(1) = W$. Ist $f = a + ib$, so ist dieses Problem äquivalent zu

$$\begin{aligned}a(t)u(t) + b(t)v(t) &= c(t), \quad t \in \mathbb{T}, \\ w(1) &= W.\end{aligned}$$

Wir können also schreiben

$$v(t) = F(t, u(t)) := -\frac{1}{b(t)} [a(t)u(t) - c(t)]. \quad (4.21)$$

Es handelt sich somit um ein explizites Riemann-Hilbert Problem. Im Allgemeinen sind die Voraussetzungen von Satz 4.1 nicht erfüllt. Notwendig und hinreichend ist die Bedingung

$$\arg(-if(t)) \in \left[-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right], \quad t \in \mathbb{T}. \quad (4.22)$$

Um die Bedingung (4.22) zu erreichen, definieren wir die Funktion $\phi(t) = \arg f(t)$. Die Lösung des homogenen Problems $\operatorname{Re} \left(\overline{f(t)} w(t) \right) = 0$ ist dann durch $w_0(t) = -i \exp(H\phi(t) + i\phi(t))$, $t \in \mathbb{T}$, gegeben, siehe auch Satz 2.21. Wir haben

$$\arg \left(-if(t) \overline{w_0(t)} \right) = 0.$$

Mit der Reihendarstellung

$$w_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

von w_0 definieren wir

$$\tilde{w}_0(t) = \sum_{k=0}^{n_0} c_k t^k$$

und wählen n_0 so, dass die Funktion $\tilde{f} := f \cdot \overline{\tilde{w}_0}$ die Bedingung (4.22) erfüllt. Das lineare Riemann-Hilbert Problem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\overline{\tilde{f}(t)} \tilde{w}(t) \right) &= c(t), \quad t \in \mathbb{T}, \\ \tilde{w}(1) &= \frac{W}{w_0(1)} \end{aligned} \tag{4.23}$$

genügt dann den Voraussetzungen von Satz 4.1 und läßt sich durch die Fixpunktiteration (4.3) lösen. Dabei müssen wir den Operator A an die Nebenbedingung $\tilde{w}(1) = \frac{W}{w_0(1)}$ anpassen. Die Lösung des Ausgangsproblems ist dann auf Grund von

$$c(t) = \operatorname{Re} \left(\overline{\tilde{f}(t)} \tilde{w}(t) \right) = \operatorname{Re} \left(\overline{f(t)} \tilde{w}_0(t) \tilde{w}(t) \right)$$

durch

$$w(t) = \tilde{w}_0(t) \tilde{w}(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

gegeben. Zur numerischen Umsetzung, beispielsweise auf einem gleichmäßigen Gitter mit n Gitterpunkten, ersetzen wir den Hilbert-Operator H durch HL_n und bestimmen damit die Werte von w_0 auf dem Gitter. Anschließend berechnen wir die Fourier-Koeffizienten von w_0 und testen sukzessive, wie groß wir n_0 wählen müssen, damit die Bedingung (4.22) erfüllt ist. Danach lösen wir das lineare Riemann-Hilbert Problem (4.23) als explizites Riemann-Hilbert Problem durch die Fixpunktiteration (4.7). Zum Schluß multiplizieren wir die Lösung mit der Funktion \tilde{w}_0 und erhalten so die Lösung des Ausgangsproblems als ein Polynom vom Grad höchstens $\frac{n}{2} + n_0$.

Mit *INM* für **i**nexact **N**ewton **m**ethod bezeichnen wir das Verfahren *ONM*, wobei wir die linearen Riemann-Hilbert Probleme (4.13) als explizite Riemann-Hilbert Probleme lösen wie oben beschrieben.

Abschließend wollen wir anmerken, dass wir beide Vorgehensweisen miteinander kombinieren können. Das heißt, wir halten das Symbol des linearen Riemann-Hilbert Problems fest und lösen es als ein explizites Riemann-Hilbert Problem, wobei wir das Symbol vorher gegebenenfalls ändern müssen. Wir korrigieren also in jedem Iterationsschritt nur die rechte Seite des

linearen Riemann-Hilbert Problems und können dadurch die Funktion \tilde{w}_0 , die eventuell das Symbol geeignet dreht, in jeder Iteration festhalten. Dieses Verfahren nennen wir *IMNM* für **i**nexact **m**odified **N**ewton **m**ethod.

4.2.3 Numerische Ergebnisse

Wir beginnen mit einem Beispiel vom Typ A. Die Zielmannigfaltigkeit M ist durch die Funktion

$$\mu_p^{(1)}(t, s) = i \sin 2\tau + \frac{1}{2p} e^{is}, \quad t = e^{i\tau} \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{R},$$

parametrisiert. Für $0 < p < 1$ haben wir $M \in \mathcal{R}$ und für $p = 1$ gilt $M \in \mathcal{S}$. Wir wählen ein gleichmäßiges Gitter mit $n = 2^{12}$ Gitterpunkten und lösen das Problem unter der Nebenbedingung $w(1) = \frac{1}{2p}$ für den Wert $p = 0.95$. Um die Methode *MNM* anwenden zu können, benötigen wir eine Startlösung s_0 , die nahe an der exakten Lösung liegt. Dazu lösen wir das Problem für $p = 0.9$ mittels *ONM* und definieren g_0 durch (4.20). Abbildung 4.8 zeigt den Zuwachs (4.11) für die Funktion $f_{j+1} - f_j$ sowohl für *ONM* (rot) als auch *MNM* (blau) und *INM* (grün). Weiterhin ist der Zuwachs für *IMNM* dargestellt (orange). Zu erkennen ist sehr

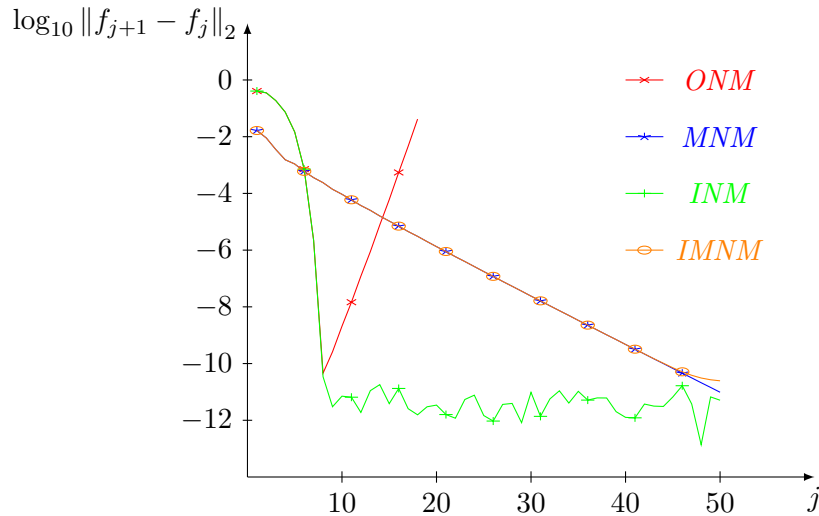


Abbildung 4.8: Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{0.95}^{(1)}$

gut die lineare Konvergenz, wenn wir das Symbol g_0 festhalten, was nach Satz 4.5 auch zu erwarten ist. Außerdem sieht man die Anfangs quadratische Konvergenz wie bei dem nicht geänderten Verfahren aus Kapitel 4.2.1, wenn wir die Riemann-Hilbert Probleme (4.13) als explizite Riemann-Hilbert Probleme lösen. Danach bleibt der Zuwachs unverändert.

Ein weiteres Beispiel ist die konforme Abbildung auf eine Ellipse. Die Zielkurven M_t , $t \in \mathbb{T}$,

sind also Ellipsen und wir suchen eine Lösung des Riemann-Hilbert Problems mit Windungszahl 1. Unsere Algorithmen funktionieren aber nur bei Lösungen mit Windungszahl 0. Aus diesem Grund modifizieren wir die Zielmannigfaltigkeit, indem wir die Ellipsen in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{T}$ drehen. Eine Parametrisierung ist dann durch

$$\mu_p^{(2)}(t, s) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1-p} \cos s + i \sin s \right), \quad t \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{R},$$

gegeben. Für $p = 0$ erhalten wir gerade den Einheitskreis. Wir wählen den Wert $p = 0.65$ und lösen das zugehörige Problem unter der Nebenbedingung $w(1) = \frac{1}{1-p}$ auf einem gleichmäßigen Gitter mit $n = 2^{12}$ Punkten. Um die Funktion g_0 zu ermitteln, bestimmen wir die Lösung des Problems für $p = 0.6$ mit Hilfe des Verfahrens *ONM*. Abbildung 4.9 zeigt den Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ analog zu Abbildung 4.8. Zu erkennen ist zum einen wieder die lineare

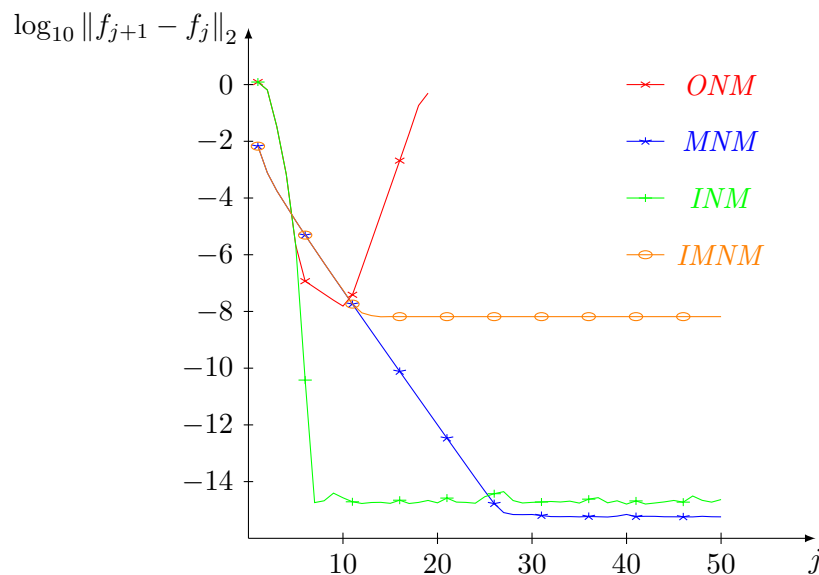


Abbildung 4.9: Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{0.65}^{(2)}$

Konvergenz, wenn wir das Symbol der linearen Riemann-Hilbert Probleme festhalten, und zum anderen die anfangs quadratische Konvergenz, falls wir die Riemann-Hilbert Probleme als explizite Riemann-Hilbert Probleme lösen. Erhöhen wir den Wert für p , so ändert sich auch die Konvergenz der Verfahren. Beispielsweise ist für $p = 0.74$ der Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ in Abbildung 4.10 dargestellt. Lösen wir die linearen Riemann-Hilbert Probleme als explizites Riemann-Hilbert Problem, so stellt sich zu Beginn eine lineare Konvergenz ein, die später in einen linearen Anstieg des Zuwachses umschlägt. Dagegen konvergiert das Verfahren mit festgehaltenem Symbol wie gewohnt linear. Dabei haben wir als Startlösung die Lösung des Problems mit $p = 0.7$ gewählt. Wir wollen anmerken, dass das Verfahren für sich konvergiert,

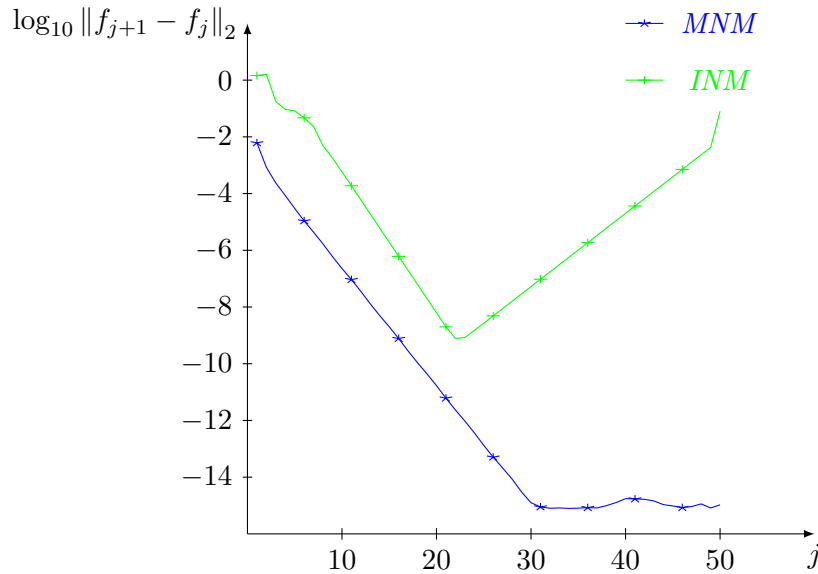


Abbildung 4.10: Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{0.74}^{(2)}$

die Lösung aber nicht gut ist, da der betragsmäßig größte negative Fourier-Koeffizient in der Größenordnung 10^{-2} liegt. Das heißt, die Lösung ist keine gute Approximation für die Randfunktion einer holomorphen Funktion.

Im Folgenden wollen wir ein adaptives Verfahren aufbauend auf dem Verfahren *MNM* vorstellen. Um die Funktion g_0 aus (4.20) zu bestimmen, benötigen wir eine gute Startnäherung. Aus diesem Grund betrachten wir eine Familie von Zielmannigfaltigkeiten M^p , $p \in [0, 1]$, so dass M^1 die Ausgangsmannigfaltigkeit darstellt und M^0 ein einfach zu lösendes Problem ist. Wir bestimmen sukzessive die Lösung des Problems M^{p_1} und verwenden diese Lösung als Startnäherung für das Problem M^{p_2} , $p_1 < p_2$. Wir gehen dabei wie folgt vor:

Schritt 0: Wähle die Anzahl der Gitterpunkte n , einen Startwert p_0 und eine Schrittweite Δp . Weiterhin sei TOL eine Schranke für die kleinste erlaubte Schrittweite Δp .

Schritt 1: Versuche das Problem M^{p_0} mittels *MNM* zu lösen. Verwende dabei als Startnäherung die Lösung des vorhergehenden Problems. Falls eine Lösung innerhalb der Genauigkeit gefunden werden konnte, gehe zu Schritt 2. Sonst gehe zu Schritt 3.

Schritt 2: Setze $p_0 := p_0 + \Delta p$ und gehe zu Schritt 1, wenn $p \leq p_{max}$ und $n \leq n_{max}$ ist.

Schritt 3: Setze $p_0 = p_0 - \Delta p$ und $\Delta p = \frac{\Delta p}{2}$. Ist $\Delta p < TOL$, so verdoppele die Anzahl der Gitterpunkte n und bestimme die Werte der zuletzt gefundenen Lösung in den neuen Gitterpunkten. Außerdem wähle man Δp neu. Gehe zu Schritt 2.

Bemerkung: Beim ersten Durchgang ist im Allgemeinen noch keine gute Startnäherung für das Problem M^{p_0} bekannt. Aus diesem Grund verwenden wir das Verfahren *ONM* aus Kapitel 4.2.1 zur Lösung dieses Problems.

Wenden wir den obigen Algorithmus auf unser Beispiel $\mu_p^{(2)}$ an und wählen $n_{max} = 2^{20}$, so bestimmt dieser Algorithmus die konforme Abbildung auf eine Ellipse mit $p = 0.803325$. Der betragsmäßig größte negative Fourier-Koeffizient ist dabei kleiner als 10^{-6} . Ändern wir die Kriterien für die Konvergenz im ersten Schritt, so erreichen wir einen Wert von $p = 0.826738$ und der betragsmäßig größte negative Fourier-Koeffizient hat eine Größenordnung von 10^{-2} . Dies entspricht der konformen Abbildung auf eine Ellipse mit Achsenverhältnis 1 zu 5.7716. Der crowding-Faktor für dieses Beispiel beträgt 835.5841, siehe [48, Kapitel 2, Satz 6].

Als nächstes geben wir ein Beispiel an, wo zur Auswertung des Hilbert-Operators adaptive Strategien verwendet werden, wie sie im Algorithmus 5 beschrieben werden. Als Beispiel wählen wir die konforme Abbildung auf eine Ellipse $\mu_p^{(2)}$ mit $p = \frac{1}{2}$. Wir starten mit einem groben Gitter mit 2^{j_0} Punkten, wobei $j_0 = 8$ gewählt worden ist. Zur Auswertung des Hilbert-Operators verwenden wir (3.20). Dabei sind die Wavelet-Koeffizienten durch die Algorithmen 3 und 4 gegeben. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.11 zu sehen. In der linken Hälfte ist die Lösung dargestellt und rechts das resultierende Gitter. Die Anpassung des Gitters um die Punkte $\tau = 0$ und $\tau = \pi$ ist dabei sehr gut zu erkennen.

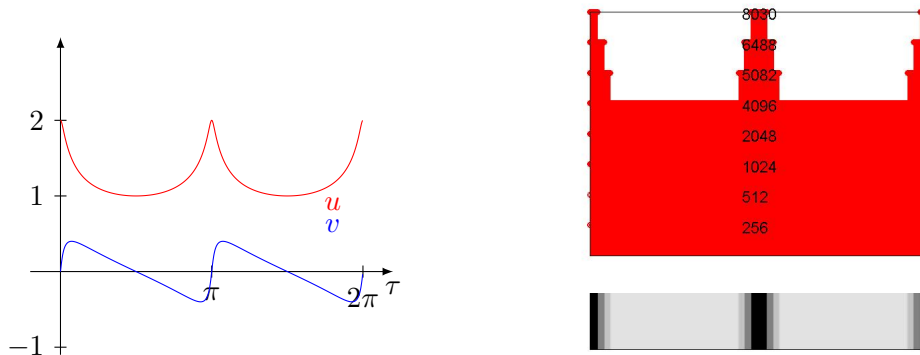


Abbildung 4.11: Gitter und Lösung für die Ellipse mit $p = \frac{1}{2}$

Zum Abschluß wollen wir anmerken, dass wir das Verfahren *MNM* dämpfen können. Die aktualisierte Lösung lautet also

$$s_{j+1}(t) = s_j(t) + \lambda_j \frac{\tilde{w}_j(t) - f_j(t)}{\text{ig}_0(t)}, \quad t \in \mathbb{T},$$

$$f_{j+1}(t) = \mu(t, s_{j+1}(t)), \quad t \in \mathbb{T},$$

mit $0 < \lambda_j \leq 1$. Die Wahl des Dämpfungsparameters λ_j kann beispielsweise über die Bedingung

$$\| \operatorname{Re} f_{j+1} - \operatorname{H} \operatorname{Im} f_{j+1} - \operatorname{Re} f_{j+1}(0) \|_{L_2} < \| \operatorname{Re} f_j - \operatorname{H} \operatorname{Im} f_j - \operatorname{Re} f_j(0) \|_{L_2}$$

realisiert werden. Der Verlauf von $\log \|f_{j+1} - f_j\|_2$ ist für das Beispiel der konformen Abbildung auf eine Ellipse mit $p = \frac{2}{3}$ in Abbildung 4.12 dargestellt. Als Startnäherung ist die Funktion $s_0(e^{i\tau}) = \tau$ gewählt worden. Abbildung 4.12 zeigt die Konvergenz dieser Vorgehensweise, obwohl das Verfahren *MNM* nicht konvergent ist. Um allgemein die Konvergenz dieses Verfahrens zu zeigen, werden weitere Untersuchungen benötigt.

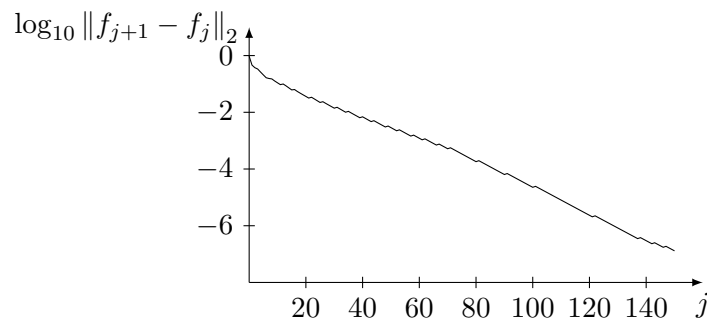


Abbildung 4.12: Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{\frac{2}{3}}^{(2)}$

4.3 Riemann-Hilbert Probleme als Operatorgleichung

In [44, Kapitel 7.2] wird ein nichtlinearer Operator eingeführt, dessen Nullstelle die Lösung des nichtlinearen Riemann-Hilbert Problems ist. Mit Hilfe dieses Operators wird ein Algorithmus zur Lösung von Riemann-Hilbert Problemen entwickelt, der im Folgenden näher vorgestellt werden soll. Anschließend treffen wir einige Modifikationen und präsentieren numerische Ergebnisse.

4.3.1 Operatorgleichung

Wir untersuchen das nichtlineare Riemann-Hilbert Problem

$$\begin{aligned} w(t) &\in M_t, & t \in \mathbb{T}, \\ w(1) &= U + iV \end{aligned} \tag{4.24}$$

mit $U + iV \in M_1$. Die Zielkurven M_t sind dabei durch

$$M_t := \{u + iv : f(t, u, v) = 0\}, \quad t \in \mathbb{T},$$

gegeben mit einer Funktion $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Mit $w^* = u^* + iv^*$ bezeichnen wir die eindeutige Lösung von (4.24) mit Windungszahl 0, falls die Zielmannigfaltigkeit vom Typ A ist. Gilt $M \in \mathcal{B}$, so setzen wir ind $M = 0$ voraus. Auf der Menge $X := W_2^1(\mathbb{T}) \times W_2^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ definieren wir nun den Operator $F : X \rightarrow X$ durch

$$F(u, v, \lambda) := (f(\cdot, u, v), u - Hv - \lambda, R(u, v)) \tag{4.25}$$

mit

$$\begin{aligned} R(u, v) &:= \alpha(v(1) - V) - \beta(u(1) - U), \\ \alpha &:= D_u f(1, U, V), \\ \beta &:= D_v f(1, U, V). \end{aligned}$$

Ist $F(x) = 0$ für $x = (u, v, \lambda)$, so löst $u + iv$ das Riemann-Hilbert Problem (4.24). Da die erste Komponente verschwindet, ist die Randbedingung erfüllt. Weiterhin ist $u + iv$ holomorph fortsetzbar, weil die zweite Komponente Null ist. Es gilt also $\lambda = u(0)$. Schließlich ist die Nebenbedingung wegen $R(u, v) = 0$ gültig. Das heißt, die Lösung des Riemann-Hilbert Problems (4.24) ist Nullstelle von F . Das folgende Lemma fasst einige Eigenschaften von F zusammen. Es entspricht dem Lemma 7.2.1 aus [44].

Lemma 4.6 *Sei $f \in C^{k+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2)$ mit $k \geq 1$ und F durch (4.25) definiert. Dann gilt:*

- (i) Der Operator F ist stetig differenzierbar. Die Ableitung von F im Punkt $x = (u, v, \lambda)$ ist durch

$$DF(x) \begin{pmatrix} \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tilde{u} + b\tilde{v}, \tilde{u} - H\tilde{v} - \tilde{\lambda}, \alpha\tilde{v}(1) - \beta\tilde{u}(1) \end{pmatrix}$$

mit $a := D_u f(\cdot, u, v)$ und $b := D_v f(\cdot, u, v)$ gegeben.

- (ii) Ist $X_0 \subseteq X$ eine hinreichend kleine Umgebung von $x^* := (u^*, v^*, u^*(0))$, so ist $DF(x)$ invertierbar für alle $x \in X_0$ und die Inverse $DF(x)^{-1}$ ist gleichmäßig beschränkt in X_0 .
- (iii) Falls $f \in C^{k+2}(X)$, dann existiert für jede beschränkte Teilmenge $X_0 \subseteq X$ eine positive Konstante L , so dass für alle $x, y \in X_0$ gilt

$$\|DF(x) - DF(y)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq L \|x - y\|_X.$$

Nach dem letzten Lemma ist das Newton-Verfahren

$$x_{j+1} = x_j - DF(x_j)^{-1} F(x_j) \quad (4.26)$$

zur Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ wohl definiert, solange die Startnäherung und alle Iterierten in einer Umgebung der Lösung x^* liegen. Um den Operator $DF(x)$ für $x = (u, v, \lambda)$ zu invertieren, betrachten wir die Gleichung

$$DF(x) \begin{pmatrix} \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\lambda} \end{pmatrix} = (g, h, \nu).$$

Weiterhin untersuchen wir das lineare Riemann-Hilbert Problem

$$\begin{aligned} a(t) \hat{u}(t) + b(t) \hat{v}(t) &= g(t) - a(t) h(t), & t \in \mathbb{T}, \\ -\beta \hat{u}(1) + \alpha \hat{v}(1) &= \nu + \beta h(1) \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit den Funktionen a, b und Konstanten α, β aus Lemma 4.6. Ist $\hat{u} + i\hat{v}$ Lösung von (4.27), so definieren wir

$$\tilde{u}(t) = \hat{u}(t) + h(t), \quad \tilde{v}(t) = \hat{v}(t), \quad \tilde{\lambda} = \hat{u}(0).$$

Wegen

$$\begin{aligned} DF(x) \begin{pmatrix} \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\lambda} \end{pmatrix} &= (a(\hat{u} + h) + b\hat{v}, \hat{u} + h - H\hat{v} - \hat{u}(0), \alpha\hat{v}(1) - \beta\hat{u}(1) - \beta h(1)) \\ &= (g - ah + ah, g, \nu + \beta h(1) - \beta h(1)) = (g, h, \nu) \end{aligned}$$

können wir das lineare Riemann-Hilbert Problem (4.27) lösen, um den Operator $DF(x)$ zu invertieren. Damit bekommen wir eine explizite Vorschrift für das Newton-Verfahren (4.26). Eine genaue Beschreibung befindet sich in [44, Kapitel 7.2], wo auch die Konvergenz des Verfahrens gezeigt worden ist, solange die Startnäherung nahe an der Lösung liegt.

4.3.2 Modifikationen des Newton-Verfahrens

Die Diskretisierung des Newton-Verfahrens (4.26) zeigt ein besseres Konvergenzverhalten als das Verfahren *ONM* aus Kapitel 4.2.1. Wir untersuchen jedoch einige Änderungen, die wir auch auf das Verfahren *ONM* übertragen können. Wir beginnen mit weiteren Eigenschaften des Operators F .

Lemma 4.7 *Sei $f \in C^{k+2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2)$, $k \geq 1$, F durch (4.25) gegeben und $x^* \in X$ mit $F(x^*) = 0$. Dann existieren positive Konstanten ω_1 , ω_2 und δ mit*

$$\begin{aligned} \|(DF(x) - DF(y))(x - y)\|_X &\leq \omega_1 \|DF(y)(x - y)\|_X^2, \\ \left\| DF(x)^{-1} (DF(x) - DF(y))(x - y) \right\|_X &\leq \omega_2 \|x - y\|_X^2 \end{aligned}$$

für alle $x, y \in U_\delta(x^*)$.

Beweis : Nach Lemma 4.6 existiert ein $\delta > 0$ und positive Konstanten L und C mit

$$\begin{aligned} \|DF(x) - DF(y)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq L \|x - y\|_X \\ \left\| DF(x)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C \end{aligned}$$

für $x, y \in U_\delta(x^*)$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \|(DF(x) - DF(y))(x - y)\|_X &= \left\| (DF(x) - DF(y)) DF(y)^{-1} DF(y)(x - y) \right\|_X \\ &\leq \|DF(x) - DF(y)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| DF(y)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \|DF(y)(x - y)\|_X \\ &\leq L \|x - y\|_X C \|DF(y)(x - y)\|_X \\ &\leq LC \left\| DF(y)^{-1} DF(y)(x - y) \right\|_X \|DF(y)(x - y)\|_X \\ &\leq LC^2 \|DF(y)(x - y)\|_X^2. \end{aligned}$$

Für die zweite Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| DF(x)^{-1} (DF(x) - DF(y))(x - y) \right\|_X &\leq \left\| DF(x)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \|DF(x) - DF(y)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - y\|_X \\ &\leq CL \|x - y\|_X^2. \end{aligned}$$

#

Als erstes untersuchen wir das gedämpfte Newton-Verfahren

$$x_{j+1} = x_j + \lambda_j \Delta x_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (4.28)$$

wobei die Schrittweite Δx_j Lösung der Gleichung

$$\mathrm{DF}(x_j) \Delta x_j = -F(x_j)$$

ist. Wir gelangen zu

Satz 4.8 Sei F durch (4.25) definiert und $x^* \in X$ mit $F(x^*) = 0$. Ist

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_j \leq 1, \quad \forall j \geq 0$$

so gilt:

- (i) Wenn $f \in C^{k+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2)$, $k \geq 1$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$ mit $\|x_0 - x^*\|_X < \varepsilon$ die durch (4.28) definierte Folge (x_j) in $U_\varepsilon(x^*)$ liegt und

$$\|x_{j+1} - x^*\|_X \leq q \|x_j - x^*\|_X$$

mit $1 - \lambda_{\min} < q < 1$.

- (ii) Wenn $f \in C^{k+2}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2)$, $k \geq 1$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$ mit $\|x_0 - x^*\|_X < \varepsilon$ die durch (4.28) definierte Folge (x_j) in $U_\varepsilon(x^*)$ liegt und

$$\begin{aligned} \|x_{j+1} - x^*\|_X &\leq \left(1 - \lambda_j + \frac{\lambda_j}{2} \omega_2 \|x_j - x^*\|_X\right) \|x_j - x^*\|_X, \\ \|F(x_{j+1})\|_X &\leq \left(1 - \lambda_j + \frac{\lambda_j^2}{2} \|F(x_j)\|_X\right) \|F(x_j)\|_X. \end{aligned}$$

Beweis : Wir beginnen mit der ersten Aussage des Satzes. Wegen $F(x^*) = 0$ haben wir

$$\begin{aligned} x_{j+1} - x^* &= x_j - x^* - \lambda_j \mathrm{DF}(x_j) F(x_j) \\ &= (1 - \lambda_j)(x_j - x^*) + \\ &\quad + \lambda_j \mathrm{DF}(x_j)^{-1} (\mathrm{DF}(x^*) - \mathrm{DF}(x_j))(x^* - x_j) + \\ &\quad + \lambda_j \mathrm{DF}(x_j)^{-1} (F(x^*) - F(x_j) - \mathrm{DF}(x^*)(x^* - x_j)). \end{aligned}$$

Wir wählen $\delta > 0$ so klein, so dass nach Lemma 4.6 für alle x mit $\|x - x^*\|_X < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{DF}(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C, \\ \|\mathrm{DF}(x) - \mathrm{DF}(x^*)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \varepsilon, \\ \|F(x) - F(x^*) - \mathrm{DF}(x^*)(x - x^*)\|_X &\leq \varepsilon \|x - x^*\|_X. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\|x_{j+1} - x^*\|_X \leq (1 - \lambda_j + 2\lambda_j C \varepsilon) \|x_j - x^*\|_X.$$

Ist $\varepsilon \leq \frac{q-(1-\lambda_{\min})}{2C}$, so bekommen wir, indem wir δ eventuell verkleinern,

$$\|x_{j+1} - x^*\|_X \leq q \|x_j - x^*\|_X.$$

Insbesondere liegt die durch (4.28) definierte Folge (x_j) in $U_\varepsilon(x^*)$, falls $\|x_0 - x^*\|_X < \varepsilon$, und die Folge konvergiert linear gegen x^* .

Als nächstes untersuchen wir den zweiten Fall. Wie oben zeigt man, dass die Folge (x_j) die Umgebung $U_\varepsilon(x^*)$ nicht verläßt. Indem wir den Iterationsindex weglassen, bekommen wir für die erste Fehlerabschätzung nach Lemma 4.7

$$\begin{aligned} \|x + \lambda \Delta x - x^*\|_X &= \left\| x - x^* - \lambda \text{DF}(x)^{-1} F(x) \right\|_X \\ &= \left\| \text{DF}(x)^{-1} (\text{DF}(x)(x - x^*) + \lambda (F(x^*) - F(x))) \right\|_X \\ &= \left\| (1 - \lambda)(x - x^*) - \lambda \text{DF}(x)^{-1} \int_0^1 (\text{DF}(x - s(x - x^*)) - \text{DF}(x)(x - x^*)) \, ds \right\|_X \\ &\leq (1 - \lambda) \|x - x^*\|_X + \lambda \int_0^1 \left\| \text{DF}(x)^{-1} (\text{DF}(x - s(x - x^*)) - \text{DF}(x))(x - x^*) \right\|_X \, ds \\ &\leq (1 - \lambda) \|x - x^*\|_X + \lambda \int_0^1 \omega_2 s^{-1} \|s(x - x^*)\|_X^2 \, ds \\ &= \left(1 - \lambda + \frac{\omega_2}{2} \lambda \|x - x^*\|_X \right) \|x - x^*\|_X. \end{aligned}$$

Mit $\text{DF}(x) \Delta x = -F(x)$ haben wir

$$\begin{aligned} \|F(x + \lambda \Delta x)\|_X &= \left\| F(x) + \int_0^\lambda \text{DF}(x + s \Delta x) \Delta x \, ds \right\|_X \\ &= \left\| -\text{DF}(x) \Delta x + \int_0^\lambda \text{DF}(x + s \Delta x) \Delta x \, ds \right\|_X \\ &= \left\| \int_0^\lambda (\text{DF}(x + s \Delta x) - \text{DF}(x)) \Delta x \, ds + \lambda \text{DF}(x) \Delta x - \text{DF}(x) \Delta x \right\|_X \\ &= \left\| \int_0^\lambda (\text{DF}(x + s \Delta x) - \text{DF}(x)) \Delta x \, ds + (1 - \lambda) F(x) \right\|_X. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.7 gilt

$$\begin{aligned}
 \|F(x + \lambda \Delta x)\|_X &\leq (1 - \lambda) \|F(x)\|_X + \int_0^\lambda \|(\mathrm{DF}(x + s\Delta x) - \mathrm{DF}(x)) \Delta x\|_X \, ds \\
 &\leq (1 - \lambda) \|F(x)\|_X + \int_0^\lambda \omega_1 s^{-1} \|s \mathrm{DF}(x) \Delta x\|_X^2 \, ds \\
 &= (1 - \lambda) \|F(x)\|_X + \frac{\omega_1}{2} \lambda^2 \|F(x)\|_X^2 \\
 &= \left(1 - \lambda + \frac{\omega_1}{2} \lambda^2 \|F(x)\|_X\right) \|F(x)\|_X.
 \end{aligned}$$

#

Bemerkung: Die optimale Wahl von λ_j wäre

$$\lambda_j = \min \left(1, \frac{1}{\omega_1 \|F(x_j)\|_X} \right).$$

Da im Allgemeinen die Konstante ω_1 nicht bekannt ist, wählen wir λ_j aus der Menge $\{2^{-k} : k = 0, 1, \dots\}$, so dass

$$\|F(x_{j+1})\|_X < \|F(x_j)\|_X.$$

Falls $\lambda_j = 1$ gewählt werden kann, erhalten wir im zweiten Fall von Satz 4.8 quadratische Konvergenz.

Als nächstes betrachten wir das vereinfachte Newton-Verfahren

$$x_{j+1} = x_j + \overline{\Delta x_j}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.29)$$

Dabei löst $\overline{\Delta x_j}$ die Gleichung

$$\mathrm{DF}(x_0) \overline{\Delta x_j} = -F(x_j).$$

Wir erhalten

Satz 4.9 Sei $f \in C^{k+1}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2)$, $k \geq 1$, F durch (4.25) gegeben und $x^* \in X$ mit $F(x^*) = 0$. Für jedes $q \in (0, 1)$ existiert ein positives δ , so dass für jedes x_0 mit $\|x_0 - x^*\|_X < \delta$ die durch (4.29) definierte Folge (x_j) gegen x^* konvergiert und der Fehler durch

$$\|x_{j+1} - x^*\|_X \leq q \|x_j - x^*\|_X$$

bestimmt werden kann.

Beweis : Wir wählen δ so klein, so dass $\text{DF}(x_0)$ invertierbar ist und für alle $x \in X$ mit $\|x - x^*\|_X < \delta$ und der Bezeichnung $C_0 := \left\| \text{DF}(x_0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)}$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x^*) - \text{DF}(x^*)(x - x^*)\|_X &\leq \frac{q}{2C_0} \|x - x^*\|_X, \\ \|\text{DF}(x) - \text{DF}(x^*)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{q}{2C_0}. \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} x_{j+1} - x^* &= x_j - x^* - \text{DF}(x_0)^{-1} (F(x_j) - F(x^*)) \\ &= \text{DF}(x_0)^{-1} (F(x^*) - F(x_j) + \text{DF}(x_0)(x_j - x^*)) \\ &= \text{DF}(x_0)^{-1} (F(x_j) - F(x^*) - \text{DF}(x^*)(x^* - x_j)) + \\ &\quad + \text{DF}(x_0)^{-1} (\text{DF}(x^*) - \text{DF}(x_0))(x^* - x_j). \end{aligned}$$

Damit gelangen wir zu

$$\|x_{j+1} - x^*\|_X \leq q \|x_j - x^*\|_X.$$

Folglich bleibt die Folge (x_j) in der Menge $\{x \in X : \|x - x^*\|_X < \delta\}$ und konvergiert gegen x^* solange $\|x_0 - x^*\|_X < \delta$. #

Zum Abschluß wollen wir ein weiteres Newton-Verfahren angeben. Es handelt sich dabei um die gedämpfte Version von (4.29) und lautet

$$x_{j+1} = x_j + \lambda_j \overline{\Delta x_j}. \quad (4.30)$$

Numerische Experimente zeigen, dass das Verfahren (4.30) konvergiert, obwohl die Methode (4.29) selbst nicht konvergent ist, da die Startnäherung zu weit von der Lösung entfernt ist.

4.3.3 Numerische Ergebnisse

Als Beispiel wählen wir die konforme Abbildung auf eine Ellipse. Da die Lösung Windungszahl 1 besitzt, drehen wir die Ellipsen in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{T}$. Die Funktion f , welche die Zielkurven M_t parametrisiert, ist dann durch

$$\begin{aligned} f_p^{(1)}(t, u, v) &= (1-p)^2 u^2 + v^2 + p(2-p) \sin^2 \tau (u^2 - v^2) + 2p(2-p) \cos \tau \sin \tau - 1, \\ t &= e^{i\tau} \in \mathbb{T}, u, v \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gegeben. Für $p = 0$ erhalten wir wieder den Einheitskreis. Wir lösen das Riemann-Hilbert Problem (4.24) unter der Zusatzbedingung $w(1) = \frac{1}{1-p}$ für den Wert $p = \frac{2}{3}$ mittels (4.26), (4.28),

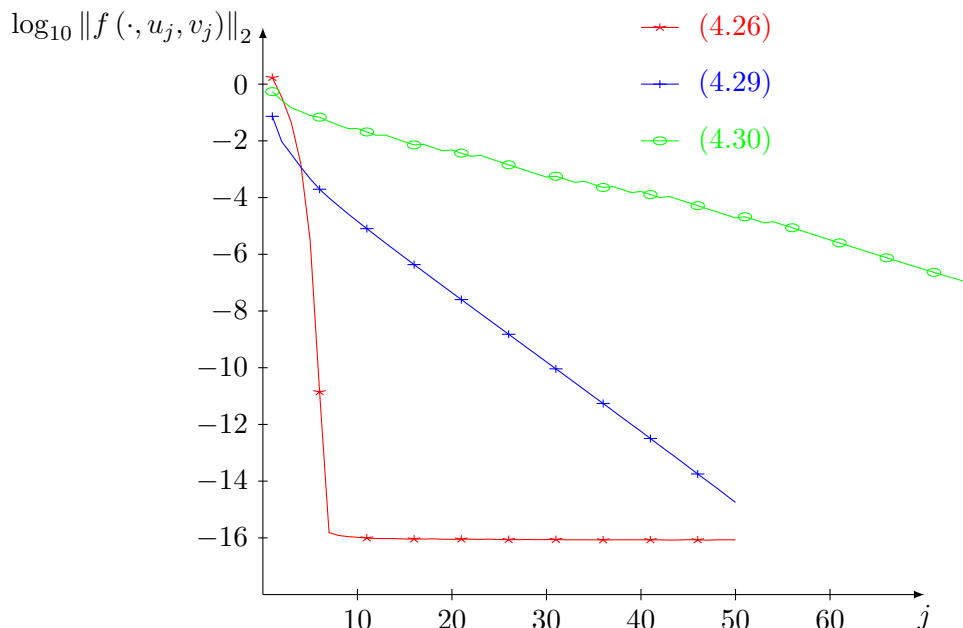


Abbildung 4.13: Zuwachs (4.11) für das Beispiel $f_p^{(1)}$ mit $p = \frac{2}{3}$

(4.29) und (4.30) auf einem gleichmäßigen Gitter mit $n = 2^{12}$ Punkten. Dabei verwenden wir HL_n als Diskretisierung des Hilbert-Operators H . Für (4.29) wählen wir als Startnäherung die Lösung des Problems für $p = 0.6$, die entweder durch ONM oder durch (4.26) bestimmt wird. Sonst beginnen wir mit $w_0(t) \equiv 1$. Abbildung 4.13 zeigt den Zuwachs (4.11) für $f(\cdot, u_j, v_j)$, wobei $u_j + iv_j$ die aktuelle Lösung während der Iteration ist. Die Werte für (4.28) sind nicht in Abbildung 4.13 dargestellt, da während der Iteration immer $\lambda_j = 1$ gewählt worden ist und sich somit kein Unterschied zu (4.26) einstellt. Tabelle 4.2 gibt den Fehler für die Holomorphie der berechneten Lösung an, das heißt, wie groß der betragsmäßig größte negative Fourier-Koeffizient ist. Aus Abbildung 4.13 erkennen wir zum einen die quadratische

Verfahren	(4.26)	(4.29)	(4.30)
Fehler Holomorphie	$2.1679 \cdot 10^{-5}$	$1.3350 \cdot 10^{-5}$	$6.5107 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 4.2: Fehler Holomorphie

Konvergenz des Newton-Verfahrens (4.26) bis wir die Maschinengenauigkeit erreicht haben. Des weiteren sehen wir die lineare Konvergenz des vereinfachten Newton-Verfahrens (4.29). Außerdem beobachten wir die Konvergenz von (4.30), obwohl die Startnäherung weit von der tatsächlichen Lösung entfernt ist. Anzumerken ist, dass das Verfahren (4.29) mit der Startnäherung $w_0(t) \equiv 1$ nicht konvergiert. Die Dämpfung führt die Iterierten in gewisser-

weise in die “richtige” Richtung.

Abschließend wählen wir für das gleiche Beispiel eine andere Diskretisierung des Operators H . Beginnend mit einem groben Gitter verwenden wir die Darstellung (3.20) zur Bestimmung der Hilbert-Transformation. Die Wavelet-Koeffizienten sind dabei durch Algorithmus 3 und 4 gegeben. Weiterhin nutzen wir adaptive Strategien wie sie im Algorithmus 5 beschrieben sind. Das resultierende Gitter ist in Abbildung 4.14 mit der entsprechenden Lösung dargestellt. Zu erkennen ist sehr gut die Anpassung des Gitters um die Werte $\tau = 0$ und $\tau = \pi$ wie bereits zu Beginn des Kapitels angesprochen.

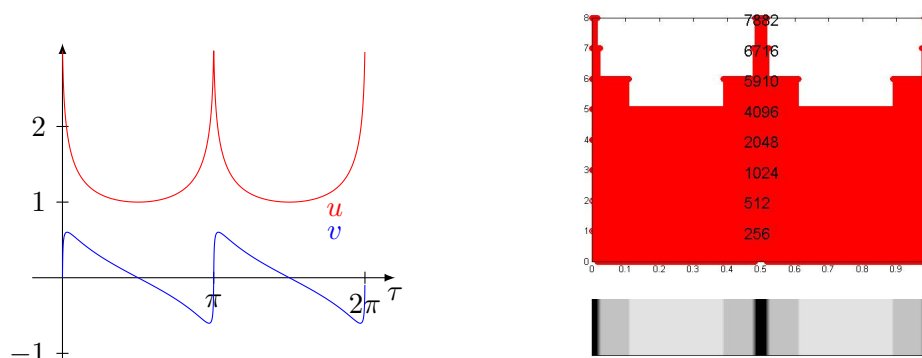


Abbildung 4.14: Gitter und Lösung für die Ellipse mit $p = \frac{2}{3}$

5 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist der Auswertung der Hilbert-Transformation mit Hilfe von Wavelets sowie deren Anwendung zur analytischen und numerischen Lösung nichtlinearer Riemann-Hilbert Probleme gewidmet.

Zu Beginn werden in Kapitel 2 einige grundlegende Resultate zusammengefasst. Insbesondere werden die Hilbert-Transformationen auf der reellen Achse und dem Kreis vorgestellt und deren Eigenschaften beschrieben. Für den Hilbert-Operator auf \mathbb{R} wird im Satz 2.13 eine Darstellung mit Hilfe von Momenten der zu transformierenden Funktion hergeleitet. Anschließend wird eine explizite Darstellung der Hilbert-Transformation für Splines mit kompaktem Träger angegeben.

Satz 2.18 stellt einen Zusammenhang zwischen der Hilbert-Transformation auf der Kreislinie \mathbb{T} und der Hilbert-Transformation periodischer Funktionen auf der reellen Achse her. Satz 2.19 gibt eine alternative Darstellung durch die Hilbert-Transformation auf \mathbb{R} , spezielle Funktionen und die Momente der Funktion an. Beide Darstellungen werden später zur Berechnung der Hilbert-Transformation von Spline-Wavelets herangezogen.

Kapitel 3 beschreibt die numerische Auswertung der Hilbert-Transformation unter Verwendung von Spline-Wavelets. Ein effektives Verfahren zur Berechnung der Hilbert-Transformation für diese Wavelets wird in Kapitel 3.2 entwickelt. Die Fehlerabschätzungen in den Lemmata 3.1, 3.2 und 3.3 garantieren, dass die Rechnungen innerhalb einer vorgegebenen Genauigkeitsschranke ausgeführt werden. Die Algorithmen 1 und 2 fassen die Vorgehensweise nochmals zusammen.

Kapitel 3.3 ist der Auswertung des Hilbert-Operators auf einem gleichmäßigen Gitter gewidmet. Da die Matrixdarstellung des Hilbert-Operators in der Wavelet-Basis voll besetzt ist, wird eine Approximation durch schwach besetzte Matrizen vorgeschlagen. Die resultierende Matrixdarstellung des Hilbert-Operators besitzt eine Bandstruktur, welche die Berechnung der Hilbert-Transformation auf einem gleichmäßigen Gitter mit Komplexität $\mathcal{O}(n \log n)$ ermöglicht, wobei n die Anzahl der Gitterpunkte bezeichnet. Der Approximationsfehler wird in Satz 3.8 bestimmt.

Im darauf folgenden Kapitel werden Verfahren zur Auswertung des Hilbert-Operators auf ungleichmäßigen Gittern entwickelt. Die Berechnung der Wavelet-Koeffizienten auf solchen Gittern wird in den Algorithmen 3 und 4 beschrieben. Das Verfahren ermöglicht die Bestimmung der Hilbert-Transformation mit einer Komplexität von $\mathcal{O}(N \log n)$, wobei N die

Anzahl der Gitterpunkte und n die Anzahl der Gitterpunkte des feinen Gitters bezeichnet. Die adaptive Konstruktion ungleichmäßiger Gitter wird in Kapitel 3.6 behandelt. Dabei werden zwei Methoden vorgestellt: Das erste Verfahren beginnt mit einem feinen Gitter und entfernt schrittweise die Punkte, die nicht benötigt werden. Das Auswahlkriterium und der resultierende Fehler werden in Satz 3.11 angegeben. Das zweite Verfahren startet auf einem groben Gitter und passt dieses durch sukzessive Verfeinerung in den Regionen an, in denen die Funktion ein schlechtes Verhalten aufweist. In Satz 3.15 wird nachgewiesen, dass diese in Algorithmus 5 beschriebene Methode für eine bestimmte Klasse von Funktionen korrekt arbeitet und eine vorgegebene Fehlerschranke einhält.

Kapitel 4 behandelt die Lösung nichtlinearer Riemann-Hilbert Probleme. Für explizite Probleme werden Lösbarkeitsaussagen formuliert, die in früheren Arbeiten formulierten Voraussetzungen an die Parametrisierung der Zielkurven weiter abschwächen. Aus dem Beweis des Resultats werden zwei diskrete Verfahren zur Lösung expliziter Probleme hergeleitet. Die erste Methode basiert auf der effektiven Auswertbarkeit des Hilbert-Operators im Fourier-Bereich. Das zweite Verfahren beruht auf der Berechnung der Hilbert-Transformation in Waveletbasen nach Kapitel 3.3. Die Konvergenz beider Verfahren wird in Satz 4.3 und Satz 4.4 bewiesen und durch numerische Experimente bestätigt.

Im nächsten Abschnitt werden Riemann-Hilbert Probleme betrachtet, deren Zielkurven durch eine Funktion parametrisiert werden. Zunächst wird ein bekanntes Verfahren vorgestellt, das auf einer Methode von Wegmann basiert. Die in der Literatur beschriebenen Konvergenzprobleme des Verfahrens werden diskutiert und durch eine Modifikation des Algorithmus überwunden. Satz 4.5 zeigt die lineare Konvergenz des modifizierten Verfahrens. Desweiteren wird eine alternative Herangehensweise zur Lösung linearer Riemann-Hilbert Probleme beschrieben. Dabei wird das lineare Riemann-Hilbert Problem als explizites Riemann-Hilbert Problem interpretiert und mit den Methoden aus Kapitel 4.1 gelöst.

Zum Abschluß werden Riemann-Hilbert Probleme untersucht, deren Zielkurven als Nullstellen einer Funktion gegeben sind. Nach Vorstellung des bekannten Lösungsverfahrens werden zwei Modifikationen vorgeschlagen. Die erste beinhaltet eine Dämpfung des zugrunde liegenden Newton-Verfahrens. Die zweite Änderung betrifft die Berechnung des Newton-Schrittes, wobei die Ableitung des entsprechenden Operators nur für die Startnäherung ausgewertet und für die weiteren Rechnungen verwendet wird. Die Sätze 4.8 und 4.9 zeigen die Konvergenz beider Methoden.

Tabellenverzeichnis

2.1	Koeffizienten h_k und \tilde{h}_k	26
2.2	Funktionen $\zeta(l, x)$	45
3.1	Momente a_l	57
3.2	Koeffizienten c_k für (3.4)	61
3.3	Werte des Parameters M	89
3.4	Anstieg der Regressionsgeraden auf dem gleichmäßigen Gitter	102
3.5	prozentualer Anteil der Gitterpunkte des ungleichmäßigen Gitters	103
3.6	prozentualer Anteil der von Null verschiedenen Einträge von $\tilde{\mathcal{H}}$	104
4.1	Fehler der Iterationen (4.7) und (4.10) sowie Kontraktionskonstante	115
4.2	Fehler Holomorphie	137

Abbildungsverzeichnis

1.1	konforme Abbildung auf eine Ellipse	9
2.1	Graph der Funktionen ${}_1\varphi$, ${}_{1,1}\psi$, ${}_{1,3}\psi$ und ${}_{1,5}\psi$	27
3.1	Hilbert-Transformation $H\psi_{j,0}$ und $H\varphi_{j,0}$ für das Level $j = 4$ und Diskretisierung $J = 8$	68
3.2	Matrix $\tilde{\mathcal{H}}$	75
3.3	Matrix für Entwicklung von H in Wavelets	76
3.4	zulässiges (oben) und nicht zulässiges (unten) Gitter	78
3.5	Graph der Funktion u_2 und Verteilung der Gitterpunkte	87
3.6	Funktionensystem (3.28)	90
3.7	Differenz von $H\varphi_{j,0}$ berechnet durch den Wittich-Operator und Algorithmus 2 (oben) sowie für den Algorithmus 2 und die exakten Werte (unten)	99
3.8	Differenz von $H\psi_{j,0}$ berechnet durch den Wittich-Operator und Algorithmus 1	100
3.9	Graph von Real- und Imaginärteil der Testbeispiele	101
3.10	Logarithmus des Fehlers (3.34) abhängig von J	102
3.11	Logarithmus des Fehlers (3.34) auf einem ungleichmäßigen Gitter	103
3.12	Logarithmus des Fehlers (3.34) für den Algorithmus 5	104
3.13	ungleichmäßiges Gitter der Testbeispiele für den Algorithmus 5 (oben $m = 1$ und unten $m = 3$)	105
4.1	konforme Abbildung auf eine Ellipse	106
4.2	Zuwachs (4.11) für die Iteration (4.7) (links) und (4.10) (rechts)	115
4.3	Zuwachs (4.11) für den Fall $a = p = 0.7$	116
4.4	Lösung des expliziten Riemann-Hilbert Problems für $p = a = 0.7$	116
4.5	Zuwachs (4.11) für den modifizierten Operator \tilde{A}_n und $p = a = 0.7$	117
4.6	Schema zur Lösung des Riemann-Hilbert Problems (4.12)	119
4.7	Zuwachs $\ f_{j+1} - f_j\ _2$ bei der konformen Abbildung auf eine Ellipse	120
4.8	Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{0.95}^{(1)}$	125
4.9	Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{0.65}^{(2)}$	126
4.10	Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{0.74}^{(2)}$	127
4.11	Gitter und Lösung für die Ellipse mit $p = \frac{1}{2}$	128
4.12	Zuwachs (4.11) für $f_{j+1} - f_j$ und Beispiel $\mu_{\frac{2}{3}}^{(2)}$	129
4.13	Zuwachs (4.11) für das Beispiel $f_p^{(1)}$ mit $p = \frac{2}{3}$	137

4.14	Gitter und Lösung für die Ellipse mit $p = \frac{2}{3}$	138
------	---	-----

Literatur

- [1] J. Appell und P. P. Zabrejko. *Nonlinear superposition operators*. Cambridge Tracts in Mathematics 95. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [2] G. Beylkin. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(6):1716–1740, 1992.
- [3] G. Beylkin. Wavelets and fast numerical algorithms. *Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Appl. Math.*, 47:89–117, 1993.
- [4] G. Beylkin, R. Coifman, und V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. I. *Commun. Pure Appl. Math.*, 44(2):141–183, 1991.
- [5] K. Bittner. Fast algorithms for periodic spline wavelets on sparse grids. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(4):1192–1213, 1999.
- [6] S. Börm und W. Hackbusch. Hierarchical quadrature for singular integrals. *Computing*, 74(2):75–100, 2005.
- [7] P. L. Butzer und R. Nessel. *Fourier analysis and approximation. Vol. 1: One-dimensional theory*. Birkhäuser Verlag, 1971.
- [8] F. Chaplais. The Strang and Fix conditions. http://cas.enscm.fr/~chaplais/FTP/Mathematical_Notes/Strang_and_Fix.pdf, 1991.
- [9] C. K. Chui. *An introduction to wavelets*. Wavelet Analysis and Its Applications. 1. Boston, MA: Academic Press, 1992.
- [10] A. Cohen, I. Daubechies, und J.-C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Math.*, 45(5):485–560, 1992.
- [11] W. Dahmen und A. Kunoth. Multilevel preconditioning. *Numer. Math.*, 63(3):315–344, 1992.
- [12] W. Dahmen, S. Prößdorf, und R. Schneider. Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations. II: Matrix compression and fast solution. *Adv. Comput. Math.*, 1(3-4):259–335, 1993.
- [13] W. Dahmen, S. Prößdorf, und R. Schneider. Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations. I: Stability and convergence. *Math. Z.*, 215(4):583–620, 1994.

- [14] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
- [15] P. J. Davis. *Circulant matrices*. 2nd ed. New York, NY: AMS Chelsea Publishing, 1994.
- [16] P. Deuffhard. *Newton methods for nonlinear problems. Affine invariance and adaptive algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin: Springer, 2004.
- [17] R. A. DeVore und G. G. Lorentz. *Constructive approximation*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer- Verlag, 1993.
- [18] A. Dutt und V. Rokhlin. Fast Fourier transforms for nonequispaced data. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14(6):1368–1393, 1993.
- [19] A. Dutt und V. Rokhlin. Fast Fourier transforms for nonequispaced data. II. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2(1):85–100, 1995.
- [20] D. Gaier. *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1964.
- [21] M. Golomb. Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes. *J. Approximation Theory*, 1:26–65, 1968.
- [22] M. Gutknecht. Fast algorithms for the conjugate periodic function. *Computing*, 22:79–91, 1979.
- [23] S. L. Hahn. *Hilbert transforms in signal processing*. The Artech House Signal Processing Library. Boston, MA: Artech House, 1996.
- [24] D. D. Haroske und H. Triebel. *Distributions, Sobolev spaces, elliptic equations*. EMS Textbooks in Mathematics. Zürich: European Mathematical Society., 2008.
- [25] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis. Volume III: Discrete Fourier analysis, Cauchy integrals, construction of conformal maps, univalent functions*. Reprint. Wiley Classics Library. New York, NY: Wiley, 1993.
- [26] J. Keiner, S. Kunis, und D. Potts. Using NFFT 3 - a software library for various nonequispaced fast Fourier transforms. *ACM Trans. Math. Software*, 36(19):1–30, 2009.
- [27] F. W. King. *Hilbert transforms. Volume 1*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

- [28] P. Koosis. *Introduction to H_p spaces. With two appendices by V. P. Havin. 2nd ed.* Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [29] S. Kunis und D. Potts. Time and memory requirements of the nonequispaced FFT. *Sampl. Theory Signal Image Process*, 7(1):77–100, 2008.
- [30] A. K. Louis, P. Maaß, und A. Rieder. *Wavelets. Theorie und Anwendungen.* Teubner Studienbücher: Mathematik. Stuttgart: Teubner, 1994.
- [31] Y. Meyer. Wavelets and operators. *Analysis at Urbana. Vol. 1: Analysis in function spaces, Proc. Spec. Year Mod. Anal./Ill. 1986-87, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.*, 137:256–365, 1989.
- [32] S. Micula und W. L. Wendland. Spline approximation of a non-linear Riemann-Hilbert problem. *Appl. Anal.*, 87(9):1067–1083, 2008.
- [33] J. Prestin. Trigonometric wavelets. *Jain, P. K. (ed.) et al., Wavelets and allied topics. New Delhi: Narosa Publishing*, pages 191–223, 2001.
- [34] J. Prestin und E. Quak. Trigonometric interpolation and wavelet decompositions. *Numer. Algorithms*, 9(3-4):293–317, 1995.
- [35] S. Prößdorf und B. Silbermann. *Numerical analysis for integral and related operator equations.* Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Abteilung: Mathematische Monographien. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
- [36] T. Qian und E. Wegert. Optimal Approximation by Blaschke Forms. *to appear in Complex Variables and Elliptic Equations.*
- [37] A. Rathsfeld. On the stability of piecewise linear wavelet collocation and the solution of the double layer equation over polygonal curves. Golberg, Michael (ed.), *Boundary integral methods: numerical and mathematical aspects.* Southampton: WIT Press/Computational Mechanics Publications. Comput Eng. 1, 177-215, 1999.
- [38] B. Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe (Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber.).* Leipzig, Teubner, 1876.

- [39] M. Rosenblum und J. Rovnyak. *Topics in Hardy classes and univalent functions*. Birkhäuser Advanced Texts. Basel: Birkhäuser, 1994.
- [40] G. Semmler. Explicit Riemann-Hilbert Problems in Hardy Spaces. *to appear in Mathematischen Nachrichten*.
- [41] G. Semmler. *Nonlinear Riemann-Hilbert Problems*. PhD thesis, TU Bergakademie Freiberg, 2004.
- [42] L. von Wolfersdorf. A class of nonlinear Riemann-Hilbert problems for holomorphic functions. *Math. Nachr.*, 116:89–107, 1984.
- [43] E. Wegert. An iterative method for solving nonlinear Riemann-Hilbert problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 29(3):311–327, 1990.
- [44] E. Wegert. *Nonlinear boundary value problems for holomorphic functions and singular integral equations*. Mathematical Research. Berlin: Akademie Verlag, 1992.
- [45] E. Wegert und M. Efendiev. Nonlinear Riemann-Hilbert problems with Lipschitz continuous boundary condition. *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.*, 130(4):793–800, 2000.
- [46] R. Wegmann. Ein Iterationsverfahren zur konformen Abbildung. *Numer. Math.*, 30:453–466, 1978.
- [47] R. Wegmann. Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping. *J. Comput. Appl. Math.*, 29(2):207–224, 1990.
- [48] R. Wegmann. Methods for numerical conformal mapping. Kühnau, R. (ed.), *Handbook of complex analysis: geometric function theory*. Volume 2. Amsterdam: Elsevier/North Holland, 2005.
- [49] D. Werner. *Funktionalanalysis. 4, überarbeitete Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2002.
- [50] J. Werner. *Numerische Mathematik. Band 1: Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme, Interpolation, numerische Integration*. Vieweg Studium. Aufbaukurs Mathematik, 1992.
- [51] M. V. Wickerhauser. *Adaptive Wavelet-Analysis: Theorie und Software*. Lehrbuch Mathematik. Wiesbaden: Vieweg, 1996.

- [52] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen. Sobolevräume und Randwertaufgaben*. Mathematische Leitfäden. Stuttgart: B. G. Teubner., 1982.